



中华人民共和国国家标准

GB/T 17989.9—2022/ISO 7870-9:2020

生产过程质量控制统计方法 控制图 第 9 部分：平稳过程控制图

Statistical method of quality control in production process—
Control charts—Part 9: Control charts for stationary processes

(ISO 7870-9:2020, Control charts—Part 9: Control charts for stationary
processes, IDT)

2022-03-09 发布

2022-10-01 实施

国家市场监督管理总局 发布
国家标准化管理委员会

目 次

前言 I

引言 II

1 范围 1

2 规范性引用文件 1

3 术语和定义、符号和缩略语..... 1

4 监测自相关过程均值的控制图 3

 4.1 概述 3

 4.2 残差图 3

 4.3 调整控制限的控制图 5

 4.4 监测自相关数据的控制图比较 7

5 平稳过程散度的监测 7

6 监测自相关过程的其他方法 9

附录 A (资料性) 随机过程和时间序列 11

附录 B (资料性) 传统控制图在自相关数据上的表现 13

参考文献 17

前 言

本文件按照 GB/T 1.1—2020《标准化工作导则 第1部分：标准化文件的结构和起草规则》的规定起草。

本文件是 GB/T 17989 的第9部分。GB/T 17989 已经发布了以下部分：

- 控制图 第1部分：通用指南；
- 控制图 第2部分：常规控制图；
- 控制图 第3部分：验收控制图；
- 控制图 第4部分：累积和控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第5部分：特殊控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第6部分：指数加权移动平均控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第7部分：多元控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第8部分：短周期小批量的控制方法；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第9部分：平稳过程控制图。

本文件等同采用 ISO 7870-9:2020《控制图 第9部分：平稳过程控制图》。

本文件做了下列最小限度的编辑性改动：

- 将标准名称改为《生产过程质量控制统计方法 控制图 第9部分：平稳过程控制图》。

请注意本文件的某些内容可能涉及专利。本文件的发布机构不承担识别专利的责任。

本文件由全国统计方法应用标准化技术委员会(SAC/TC 21)提出并归口。

本文件起草单位：清华大学、中国标准化研究院、山西嘉世达机器人技术有限公司、内蒙古蒙牛乳业(集团)股份有限公司、聊城科创节能设备有限公司。

本文件主要起草人：孙静、张昱妍、丁文兴、马岸原、牛立群、孙晓普、杨志刚、田桂艳、门广才。

引 言

控制图是过程控制中常用的统计工具,用来监测过程中的偏移,保持过程稳定。GB/T 17989 控制图系列标准分为以下 9 部分:

- 控制图 第 1 部分:通用指南。目的在于给出控制图基本术语、原理及分类,以及选择控制图的指南。
- 控制图 第 2 部分:常规控制图。目的在于确立使用常规控制图进行过程控制的指南。
- 控制图 第 3 部分:验收控制图。目的在于确立验收控制图进行过程控制的使用指南,并规定了确定子组样本量、行动限、和决策准则的一般程序。
- 控制图 第 4 部分:累积和控制图。目的在于确立应用累积和技术进行过程检测、控制和回顾性分析的统计方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 5 部分:特殊控制图。目的在于确立理解和应用特殊控制图进行统计过程控制的指南。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 6 部分:指数加权移动平均控制图。目的在于确立理解和应用指数加权移动平均(EWMA)控制图进行统计过程控制的指南。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 7 部分:多元控制图。目的在于确立构建和应用多元控制图进行统计过程控制的指南,并建立了使用和理解计量数据多元控制图的常规方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 8 部分:短周期小批量的控制方法。目的在于确立子组大小为 1 时,应用常规计量控制图检测短周期和小批量生产过程的方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 9 部分:平稳过程控制图。目的在于确立构建和应用控制图对平稳过程进行控制的指南。

在工业生产中,统计过程控制(SPC)技术被广泛用于过程控制和质量提升。多种基于统计的控制图被提出,用来监测过程的均值和散度。传统的统计过程控制理论是基于“过程数据统计独立”这一基本假设而建立的。然而,过程数据并不总是彼此统计独立。在诸如化工这类连续生产的行业,大多数描述质量特性的过程数据存在自相关。总的来说,自相关性可能由测量系统、动态过程或二者共同引起的。多数情况,数据会产生漂移。生物学中,随机的生物性变化可能会带来持续的影响,以至于几次连续的测量都受到同一个随机现象的影响。例如,某些影响血压的物质的随机爆发式分泌。在数据采集过程中,当采样间隔较短时,数据的自相关性,尤其是正自相关性,就成为要注意的问题。这种情况下,传统的统计过程控制方法不再适用于过程质量的监测、控制和提升。

根据是否平稳,自相关过程可以分为以下两类:

- 1) 平稳过程——独立同分布(i.i.d.)序列的直接延伸。若一个自相关过程处于“统计平衡”的状态,则是平稳的。这表明过程的基本表现不会随着时间而变化。特别是,平稳过程的均值和方差是不变的。
- 2) 非平稳过程

关于随机过程和时间序列的详细信息请见附录 A。

为了监测自相关数据,提出了新的统计过程控制方法,主要分为两种:第一种方法是,先利用数据拟合时间序列模型或其他数学模型,然后利用过程的残差控制图进行监测。另一种更为直接的方法则是改进现有的控制图,例如,根据过程的自相关性,调整控制限。

本文件旨在概述了监测平稳过程均值和方差的几种主要控制图。

生产过程质量控制统计方法 控制图

第9部分：平稳过程控制图

1 范围

本文件给出了构建和应用控制图对平稳过程进行控制的指南。

2 规范性引用文件

下列文件中的内容通过文中的规范性引用而构成本文件必不可少的条款。其中，注日期的引用文件，仅该日期对应的版本适用于本文件；不注日期的引用文件，其最新版本（包括所有的修改单）适用于本文件。

GB/T 3358.2 统计学词汇及符号 第2部分：应用统计（GB/T 3358.2—2009，ISO 3534-2:2006，IDT）

3 术语和定义、符号和缩略语

3.1 术语和定义

GB/T 3358.2 界定的以及下列术语和定义适用于本文件。

3.1.1

自协方差 autocovariance

按时间顺序排列的观测值序列中，观测值之间的内部协方差。

3.1.2

自相关过程的控制图 control charts for autocorrelated processes

用于自相关过程进行统计过程控制的控制图。

3.2 符号和缩略语

3.2.1 符号

下列符号适用于本文件。

a_t	AR(1)过程中 t 时刻的随机变量 a
L_z	Z_t 的控制限的参数值（以 Z_t 的标准差的倍数表示）
$N(\mu, \sigma^2)$	均值为 μ ，方差为 σ^2 的正态分布
r	EWMS 控制图的平滑参数
R_t	t 时刻的残差
$\bar{R}$	R_t 的算术平均
s	x 的标准差

S_R	$\{R_t\}$ 的标准差
S_0^2	S_t^2 的初始值
S_t^2	t 时刻的 EWMS
T	随机过程的指标集
X_t	t 时刻的随机变量 X
$\hat{X}_t$	X_t 的预测值
$\bar{x}$	x 的算术平均
Z_t	t 时刻的 EWMA 统计量
Z_0	Z_t 的初值
ρ	自相关系数
$\hat{\rho}$	自相关系数的估值
γ	自协方差
$\hat{\gamma}$	自协方差的估值
Δ	均值的阶跃变化(以过程标准差的倍数表示)
λ	EWMA 控制图的平滑参数
μ	过程均值的真值
σ	过程标准差的真值
σ_Z	EWMA 统计量的标准差
σ_a	AR(1)过程的白噪声随机变量 a_t 的标准差
τ	两个时间点之间的时间间隔
ϕ	AR(1)过程的相关系数

3.2.2 缩略语

下列缩略语适用于本文件。

ACF	自相关函数(autocorrelation function)
ARL	平均链长(average run length)
AR(1)	一阶自回归过程(first order autoregressive process)
CUSUM	累积和(cumulative sum)
EWMA	指数加权移动平均(exponentially weighted moving average)
EWMAST	平稳过程的指数加权移动平均(exponentially weighted moving average for a stationary process)
EWMS	指数加权均方差(exponentially weighted mean squared deviation)
i.i.d	独立同分布(independent and identically distributed)
SPC	统计过程控制(statistical process control)

4 监测自相关过程均值的控制图

4.1 概述

许多统计学家和从事统计过程控制的工作人员都发现,过程数据中存在的自相关会影响传统的用于统计过程控制的控制图的表现。类似于自协方差(见 3.1.1),自相关系数是以时间为序的观测数据内部的相关系数。测量系统、过程的动态属性,都可能导致自相关性。自相关为正时对多种传统控制图的影响见附录 B。

4.2 残差图

残差图用于监测过程均值可能发生的变化。若要构建残差图,则需要将时间序列或其数学模型用于过程数据的分析。

构建残差图前,需要对过程数据建模以得到过程的残差^[2]。对于一组时序数据 $\{x_t; t=1, 2, \dots, N\}$,可建立时间序列或数学模型去进行数据拟合。在 t 时刻的残差被定义为:

$$R_t = x_t - \hat{x}_t$$

其中, $\hat{x}_t$ 是基于时间序列或数学模型得到的 t 时刻的预测值。

假设模型正确,则残差在统计意义上彼此独立。传统进行统计过程控制的控制图,如单值 X 图、CUSUM 控制图、EWMA 控制图,都能用来监测残差。若使用单值 X 图监测残差,就得到 X 残差图。一旦检测到残差过程中出现了均值变化,则判定过程本身的均值已处于失控状态。

相似地,CUSUM 残差图和 EWMA 残差图分别在参考文献[3]和参考文献[4]中提出。关于残差图和其他控制图之间的对比,见参考文献[5]。

残差图的优势:

——残差图能用于任何自相关数据,包括非平稳序列。通常,使用软件来拟合时序模型。

残差图的劣势:

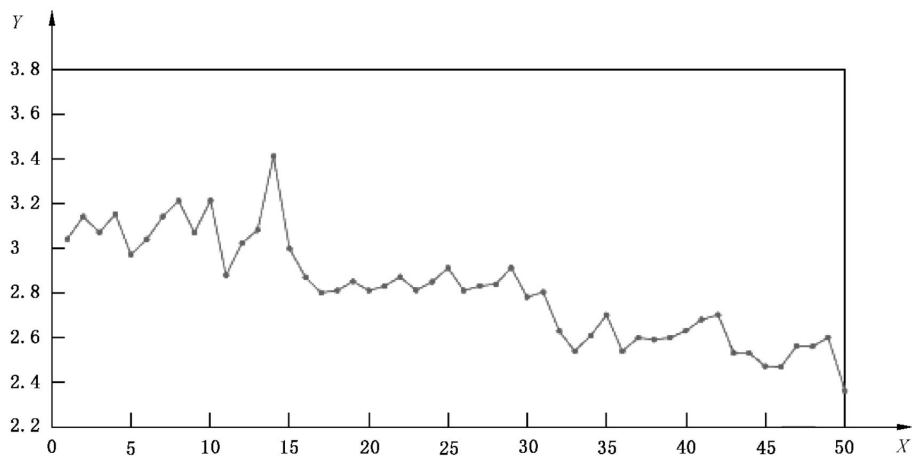
——残差图 and 传统控制图的性质不尽相同。AR(1)过程[AR(1)过程见 A.3.3]的 X 残差图对均值变化的监测效果不佳。参考文献[6]表明当过程出现正自相关时, X 残差图的效果并不理想。

参考文献[7]表明,与单值 X 图相比, X 残差图的检测能力,有时更弱。

——构建残差图,需要用时间序列或模型来处理数据。残差图的使用者应不断检查模型的有效性,以减弱建模误差和过程变化带来的混合效果。

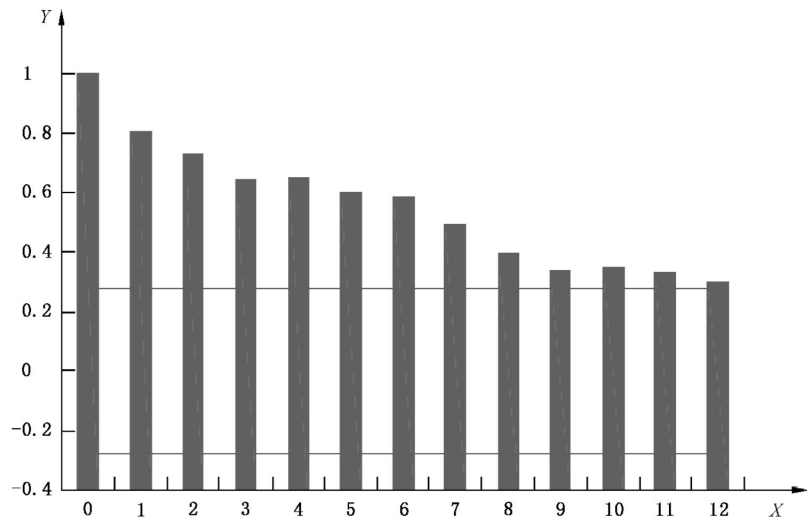
为了更直观地说明,给出一个示例。通过对铝冷轧过程中冷却剂的黏度进行测量,得到一个样本量为 50 的数据集^[8]。图 1 表明,数据呈现下降的趋势。然而,怀疑这些观测数据并不相互独立。图 2 为间隔取为 0 到 12 时,得到的样本自相关函数(ACF)的图像。对于样本自相关和 ACF,见附录 A 中的 A.4.2、A.5 和参考文献[9]。如 A.5 所述,基于独立同分布的正态序列的假设,间隔大于 1 的样本自相关系数应有约 95%落在 $\pm 1.96/\sqrt{50}$ 之间。基于此,由图 2 可见,上述观测数据并不独立。参考文献[8]提供了一个预测 t 时刻冷却剂黏度的模型:

$$\hat{x}_t = a + bx_{t-1} + cx_{t-2} + dx_{t-3} + ex_{t-4}, t = 1, \dots, 50$$



标引序号说明：
X —— 观测序号；
Y —— 黏度。

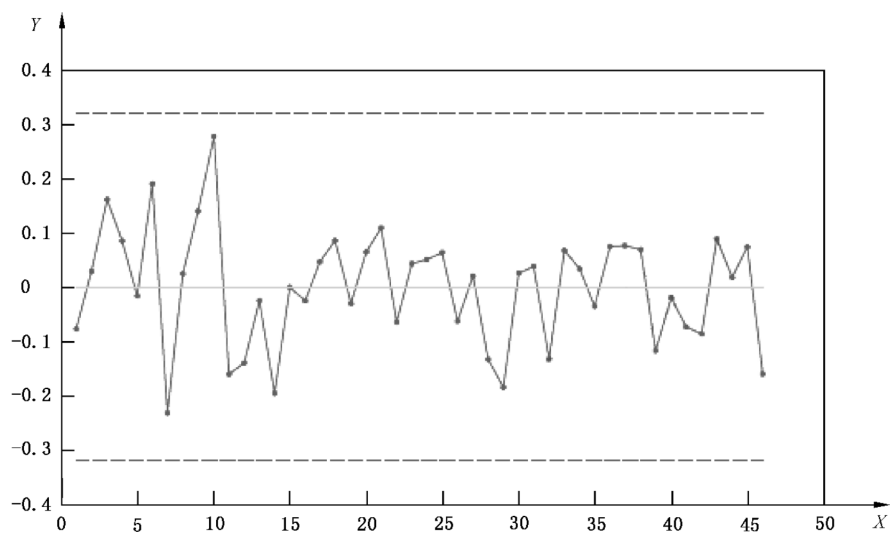
图 1 示例



标引序号说明：
X —— 间隔；
Y —— 自相关系数。

图 2 每日黏度的观测序列的自相关函数及近似 95%置信带

参考文献[8]给出了 a 、 b 、 c 、 d 的估值,通过 $R_t = x_t - \hat{x}_t$, $t = 1, \dots, 46$ 来计算残差,如图 3 所示。同样地,为了检验残差是否彼此独立,可再利用带有置信带的自相关函数 ACF 图像,如图 4 所示。可证明残差不再存在自相关,可使用 3σ 控制限的单值 $\bar{X}$ 图($\bar{R} \pm 3S_R$, 其中 $\bar{R}$ 为序列 $\{R_t\}$ 的均值, S_R 是序列 $\{R_t\}$ 的标准差)来监测残差。由图 3 可见,残差的均值以及过程的均值处于受控状态。

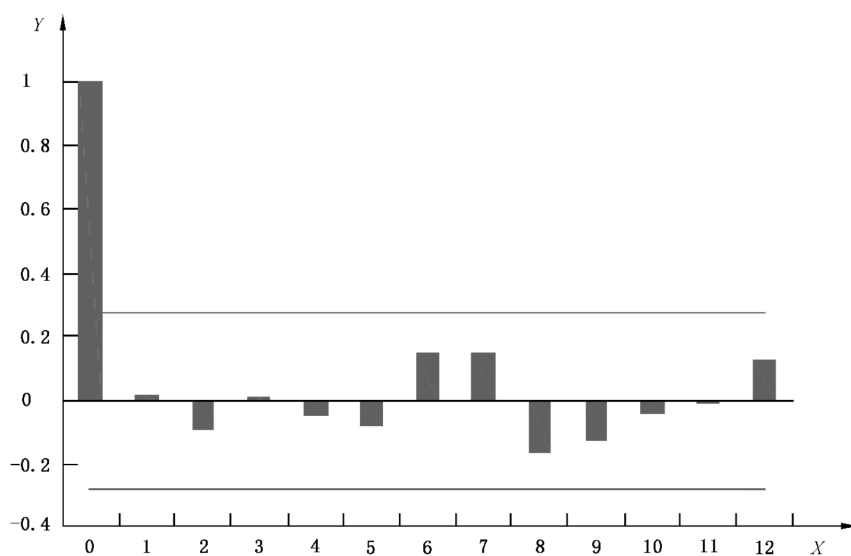


标引序号说明:

X —— 时间;

Y —— 残差。

图 3 黏度序列的残差以及 3σ 控制限的单值 X 图



标引序号说明:

X —— 间隔;

Y —— 自相关系数。

图 4 黏度序列残差的自相关函数及其近似 95%置信带

4.3 调整控制限的控制图

4.3.1 调整的 EWMA 控制图

与残差图相比,更直接的方法是:不建立时序模型,而直接对控制图的控制限进行调整。基于此思路得到了一些方法,然而他们仅适用于一些特定的过程,如 $AR(1)$ 过程^[10]。参考文献[11]提出了平稳过程的监测 EWMA 的方法,即 EWMAST 控制图,适用于常规意义的平稳过程。基于下面的统计量来

构建控制图^[11]：

$$Z_t = (1 - \lambda) Z_{t-1} + \lambda X_t \quad \dots\dots\dots (1)$$

其中, $Z_0 = \mu$ 即过程的均值; λ 是平滑参数 ($0 < \lambda \leq 1$)。

假设过程序列 $\{X_t; t = 1, 2, \dots, N\}$ 是均值为 μ 方差为 σ^2 的平稳序列。当 t 值很大时, Z_t 的方差可近似为：

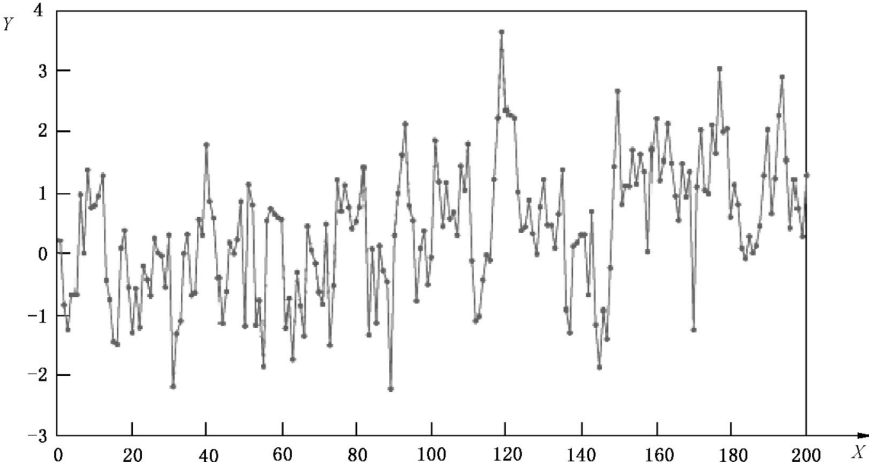
$$\sigma_Z^2 \approx \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \sigma^2 \left[1 + 2 \sum_{k=1}^M \rho(k) (1 - \lambda)^k [1 - (1 - \lambda)^{2(M-k)}] \right] \quad \dots\dots\dots (2)$$

其中, M 是整数, $\rho(k)$ 是间隔为 k 的过程自相关系数。注意, 当过程不存在自相关性时, σ_Z^2 与传统 EWMA 控制图相同。假设 X_t 服从正态分布, 那么 Z_t 也服从均值为 μ 的正态分布。 Z_t 在图上打点, 得到 EWMAST 控制图, 控制图的中心线位于 μ 的位置, 且 $L_Z \sigma$ 控制限由下式给出：

$$\mu \pm L_Z \sigma_Z$$

一般情况下, 宜使用 $\lambda = 0.2$ ^[11], L_Z 通常取 2 或 3。当 μ 、 σ 和自相关系数未知时, 通常用过程处于统计控制状态的历史数据 $\{X_t\}$ 的算术平均值 $\bar{x}$ 、样本标准差 s 和样本自相关系数 $\hat{\rho}(k)$ 来进行估计。在用历史数据估计自相关系数时, 可以使用一些经验法则。参考文献[12](第 32 页)表明, 只有当数据量 $N \geq 50$ 且 $k \leq N/4$ 时, 才能得到有效的 $\rho(k)$ 估值。因此, 公式(2)中的 M 宜足够大, 使得公式(2)给出的近似值可使用; 同时 M 要小于 $N/4$, 以避免自相关系数的估值有较大的误差。模拟研究表明, 当 $N \geq 100$ 时, $M = 25$ 是推荐的取值^[11]。

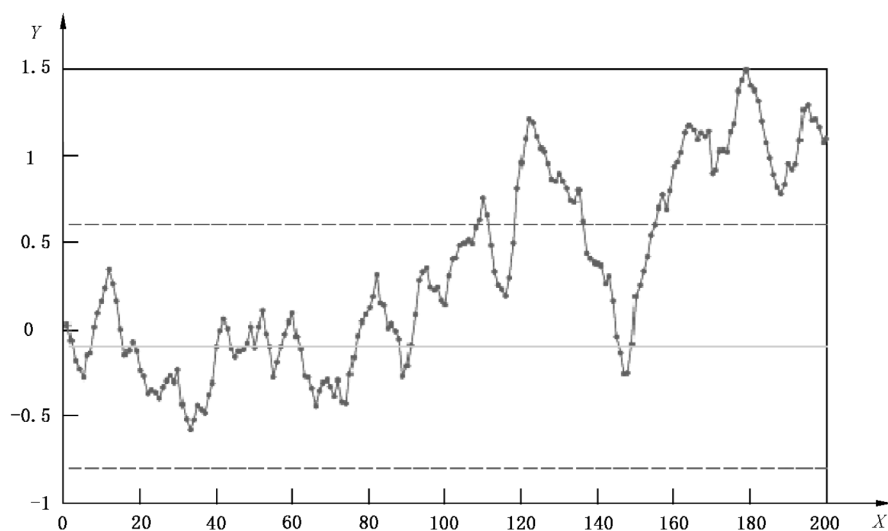
为了更直观地加以说明, 以 $\phi = 0.5$ 、方差 $\sigma^2 = 1$ 、链长为 200 的 AR(1)过程的模拟数据为例。白噪声(见 A.3.2)服从正态分布。前 100 个观测值的过程均值为 0。从第 101 个观测值, 过程均值出现从 0~1(即 1σ)的阶跃变化。图 5 给出这些模拟数据的折线图。



标引序号说明：
X——时间；
Y——观测值。

图 5 列举 EWMAST 图对 AR(1)过程的实现

若将前 100 个数据构成的过程视为平稳的, 据此对过程的均值、标准差和样本的自相关系数进行估计, 得到 $\bar{x} = -0.10$, $S = 0.91$, 以及 $\hat{\rho}(k)$ ($k = 1, 2, \dots, 25$)。取 $M = 25$, $\lambda = 0.2$, 由公式(2)得到, Z_t 标准差的估值 $\hat{\sigma}_Z = 0.24$ 。图 6 为中心线为 $\bar{x} = -0.10$ 、 3σ 控制限由 $\bar{x} \pm 3\hat{\sigma}_Z = (-0.81; 0.60)$ 给出的 EWMAST 控制图。该控制图发出警报: 从第 110 个观测值开始, 控制图监测到过程均值增大。



标引序号说明:

X——时间;

Y——EWMA。

图 6 用于图 5 均值增大的模拟数据的 EWMAST 控制图

4.3.2 调整的 CUSUM 控制图

参考文献[13]讨论了在过程自相关较弱时,用 CUSUM 控制图直接处理原始数据的效果。在过程自相关较强时,则考虑使用经过处理的观测数据。参考文献[10]和参考文献[14]还提出了将改进后的 CUSUM 控制图应用于 AR(1)过程或其他时间序列过程的方法。

4.4 监测自相关数据的控制图比较

关于监测自相关数据的控制图之间的比较,已有文献进行了讨论。参考文献[10]和参考文献[5]通过数据模拟,对比了平稳 AR(1)过程的单值 X 控制图、 X 残差图、CUSUM 残差图、EWMA 残差图,以及 EWMAST 控制图的效果。研究发现,EWMAST 控制图的表现要优于 CUSUM 残差图和 EWMA 残差图。总体来看,EWMAST 控制图的表现同样优于单值 X 控制图和 X 残差图。模拟结果还表明,CUSUM 残差图和 EWMA 残差图的效果相差无几。当过程自相关不强时,CUSUM 残差图和 EWMA 残差图的效果优于 X 残差图。与之相反,当过程自相关较强时, X 残差图的效果则要优于其他残差图。当过程自相关很强时,此时过程已近乎不平稳,EWMAST 控制图的表现相对来说仍优于其他控制图。

应用 EWMAST 控制图的一个明显的优势,就是不需要为平稳过程数据构建时间序列模型。EWMAST 控制图的使用,仅需要对过程处于受控状态的过程均值、标准差和自相关系数进行估计。总之,当过程存在自相关且平稳时,宜使用 EWMAST 控制图来监测过程均值。

5 平稳过程散度的监测

参考文献[15]讨论了两种可用于监测过程散度的控制图:一种是基于目标的指数加权均方差构建的,称为指数加权均方差(EWMS)控制图。另一种则是基于指数加权移动方差构建的,称为指数加权移动方差(EWMV)控制图,其过程均值由观测值的 EWMA 控制图估计得到。

假设 $\{X_t, t=1, 2, \dots\}$ 是过程均值为 μ 、方差为 σ^2 且服从联合正态分布的过程序列。指数加权移动均方差的定义为:

$$S_t^2 = (1-r)S_{t-1}^2 + r(X_t - \mu)^2$$

其中 $t=1,2,\dots$; r 为 EWMS 控制图的平滑参数 ($0 < r \leq 1$)。

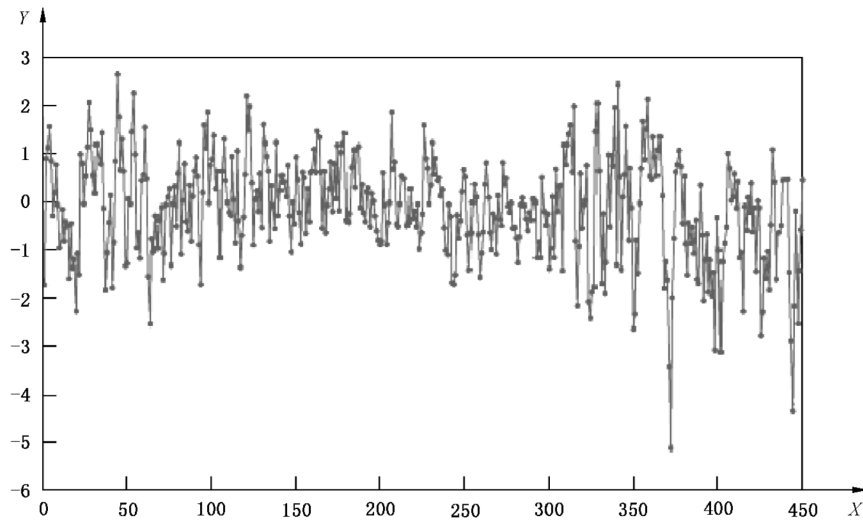
通常令 $S_0^2 = \sigma^2$ 为过程的方差。 S_t^2 是过程在 t 时刻的均方差的估计值。通过 S_t^2 打点,来构建 EWMS 控制图,其中心线 $S_0^2 = \sigma^2$ 、控制限由 σ^2 和卡方分布来确定,该卡方分布的自由度在每一时刻 t 都是 r 的函数。参考文献[15]提出,可将 EWMS 控制图用于一个独立同分布序列以及可用一个 AR(1) 过程加上白噪声来表示的过程。参考文献[16]提出,用残差图来监测过程方差可能发生的变化,而该过程由一个 AR(1) 过程加上白噪声项来表示。

参考文献[17]将 EWMS 控制图的应用延伸到平稳过程的情况。若与 EWMAST 控制图结合使用,EWMS 控制图能用于监测平稳过程方差可能发生的变化。

为了更直观地说明 EWMS 控制图,以一个均值 $\mu=0$ 、相关系数 ϕ 为 0.5 的 AR(1) 过程为例。过程方差 σ^2 在 $t=1$ 和 $t=150$ 之间为 $\sigma^2=1$,在 $t=151$ 和 $t=300$ 之间为 $\sigma^2=0.5$,在 $t=301$ 和 $t=450$ 之间为 $\sigma^2=2$ 。图 7 展示了该过程的观测结果。

用 EWMAST 控制图对数据进行了处理,其中参数 $\lambda=0.2$ 。由公式(2)得到,EWMAST 控制图中的 EWMA 统计量的标准差是 0.51。图 8 给出了带 3σ 控制限的控制图。由图可见,尽管 t 在 372 到 448 之间有 9 个点落在控制限外,过程均值看起来依然稳定。因此,该过程的均值被认为是不变的。

对 EWMS 控制图,取 $r=0.05$ 、 $\alpha=0.05$,渐进的上下控制限分别为 0.52 和 1.64,如图 9 所示。从 $t=158$ 时刻开始,监测到均方差的下降;从 $t=329$ 时刻开始,监测到均方差的上升。因图 8 表明过程均值一直保持稳定,故可认为过程方差发生了变化。

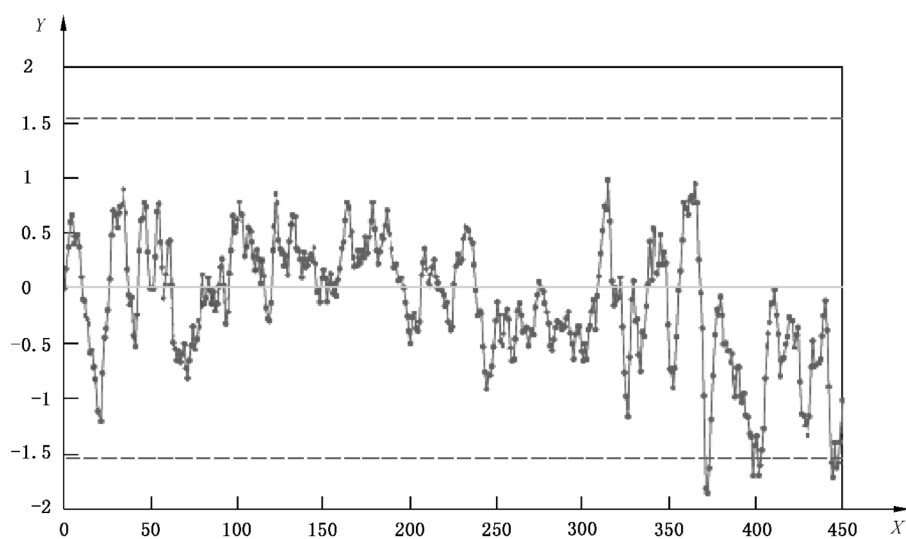


标引序号说明:

X —— 时间;

Y —— EWMS 值。

图 7 EWMS 控制图对 AR(1) 过程的实现(过程均值固定为 0,过程方差出现两次变化)

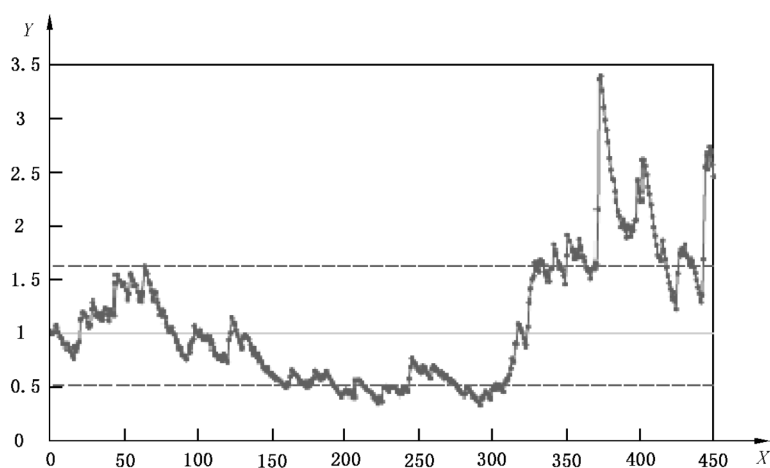


标引序号说明:

X —— 时间;

Y —— EWMA 值。

图 8 用于图 7 时间序列的 EWMA 图及控制限



标引序号说明:

X —— 时间;

Y —— EWMS。

图 9 用于图 7 时间序列的 EWMS 图及控制限

6 监测自相关过程的其他方法

第 4 章和第 5 章讨论了监测过程数据存在自相关情况的控制图。除了适应自相关以外,也能通过一些数据处理的技巧来消除自相关的影响。参考文献[18]讨论了选择采样间隔对过程数据的影响。当过程是平稳的且不那么频繁地被采样时,样本数据的自相关会减弱。因此,当采样间隔足够大时,数据彼此不相关。然而,这种方法丢弃了采样间隔中间的数据,而错过过程中重要事件的可能性被加大。除了选择较大的采样间隔,还可以构建窗口大小固定的过程移动平均。参考文献[19]显示,当过程是平稳的且满足一些常规条件时,不重叠的均值或批次均值近似彼此独立且服从正态分布。因此,当批次大小

足够大时,批次均值可被看作白噪音。对某些特定的平稳过程,许多参考文献都讨论了子样本均值或批次均值以及批次均值的相应控制图的表现。参考文献[20]讨论了使用广义的平稳过程移动平均消除自相关的效果,以及在过程控制图中的应用。

附录 A

(资料性)

随机过程和时间序列

A.1 概述

随机过程 $\{X_t; t \in T\}$ 由一系列随机变量构成,其中 T 是指标集^[9]。若 T 代表时间,则称该随机过程为时间序列。当 T 取一系列离散值,如 $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 时,该过程被称为离散时间序列。在本文件中,只讨论时间间隔相等的离散时间序列。离散时间序列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 可看作是一系列随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的取值。序列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 又称为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的一个实现。

A.2 时间序列的自协方差和自相关系数

若时间序列 $\{X_t; t \in T\}$ 在 t 时刻的均值为 μ_t 、方差为 σ_t ,那么:

- a) 对任意 $t_1, t_2 \in T$, 自协方差函数 $\gamma(\cdot)$ 为: $\gamma(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - \mu_{t_1})(X_{t_2} - \mu_{t_2})]$;
- b) 对任意 $t_1, t_2 \in T$, 自相关函数 $\rho(\cdot)$ 为: $\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2}}$ 。

对某一随机过程或时间序列,若对任意 $t_1 \neq t_2$, 都存在着非零的 $\rho(t_1, t_2)$, 则称该随机过程或时间序列存在自相关。

A.3 平稳时间序列和平稳时间序列模型

A.3.1 概述

如果一个时间序列处于“统计平衡”状态,则称该时间序列是平稳的。换言之,该时间序列的基本表现并不随时间而变化。在本文件中,若时间序列 $\{X_t; t \in T\}$ 满足下列条件,则称其是协方差平稳的或平稳的:

- a) $E[X_t] = \mu$ (即对所有 t 值均为常数);
- b) $V[X_t] = \sigma^2 < \infty$ (即对所有 t 值均为有限常数);
- c) $\gamma(t_1, t_2)$ 只随间隔数 $\tau = t_1 - t_2$ 而变化。于是, $\gamma(t_1, t_2)$ 可写作 $\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2) = \gamma(\tau)$ 。

条件 1) 和条件 2) 规定了时间序列必须有相同的均值和相同的方差。条件 3) 规定了自协方差函数必须仅随时间间隔数而变化。如果上述条件中一个及多个没有被满足,则过程是不平稳的。对于平稳的时间序列,通常用 $\gamma(\tau)$ 来表示间隔数为 τ 时的自协方差函数。

一个平稳时间序列在间隔数为 τ 时的自相关函数(ACF)由下式给出:

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\sigma^2}$$

显然 $\rho(0) = 1$ 。由此引出一些简单的平稳时间序列模型,见 A.3.2 和 A.3.3。

A.3.2 白噪声

若某一时间序列满足下列条件,则称其为白噪声:

- a) X_t 同分布,其均值相同,方差相同且有限;
- b) 对任意 $t_1 \neq t_2$, 自协方差 $\gamma(t_1, t_2) = 0$ 。

由条件 2) 可知,对任何间隔数不为 0 的情况,白噪声的自相关系数恒为 0。若 $\{X_t\}$ 是服从正态分布的白噪声,则是一个独立同分布序列。

A.3.3 一阶自回归[AR(1)]过程

离散时间序列 $\{X_t; t \in (0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$ 被称为一阶自回归[AR(1)]过程, 若

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + a_t \quad \dots\dots\dots (A.1)$$

其中 ϕ 是参数, 取常数; $\{a_t\}$ 是均值为 0、方差为 σ_a^2 的白噪声组成的随机变量。

当 $|\phi| < 1$ 时, $\{X_t\}$ 是平稳的, 且均值为 μ 、方差为 $\sigma_a^2/(1-\phi^2)$ [20]。公式(A.1)阐明了前一时刻测量值与均值的差(即 $X_{t-1} - \mu$)与这一时刻测量值与均值的差(即 $X_t - \mu$)之间的关系。对测量值之间的相关性进行建模。该相关性的幅度由 ϕ 决定。当 $\phi > 0$ 时, 通常称过程的测量值是正自相关的。反之, 当 $\phi < 0$ 时, 过程测量值是负自相关的。特别是, 当 $\phi = 0$ 时, 过程为白噪声。图 B.1 到图 B.5 展示了均值为 0、 ϕ 从 0~0.9 取值的 AR(1)过程的 5 次实现。

A.4 平稳时间序列的均值、自协方差和自相关系数的估计

A.4.1 μ 的估计

对于一次实现 $\{x_t; t=1, 2, \dots, N\}$, 过程均值 μ 通常由算术平均或样本均值 $\bar{x} = \frac{\sum_{t=1}^N x_t}{N}$ 进行估计。

A.4.2 $\gamma(\tau)$ 和 $\rho(\tau)$ 的估计

平稳时间序列在间隔数为 τ 时的自协方差的估值为: $\hat{\gamma}(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^{N-|\tau|} (X_t - \bar{X})(X_{t+|\tau|} - \bar{X})}{N}$, $\tau=0, \pm 1, \dots, \pm(N-1)$ 。若 $|\tau| \geq N$, 则自协方差的估值为 0 [9]。特别是, 当 $\tau=0$ 时, $\hat{\gamma}(0)$ 是过程方差的估值。实际工作中, 通常用传统的样本方差 S^2 [估算公式的分母不是 N , 而是 $(N-1)$] 来替代 $\hat{\gamma}(0)$ 。相应的自相关系数的估值, 又称为样本自相关系数, 通常用 $\hat{\rho}(\tau) = \frac{\hat{\gamma}(\tau)}{\hat{\gamma}(0)}$ 进行估计。

A.5 时间序列数据的自相关性检验

对过程数据的自相关性进行检验是非常重要的。下面是两种常用的样本检验方法。

a) 利用带有置信带的样本自相关函数(ACF)图:

在 N 较大时, 有限方差的独立同分布序列 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的样本自相关系数 $\{\hat{\rho}(\tau)\}$, 可以近似看作一个服从 $N(0, 1/N)$ 分布的独立同分布序列 [21]。若 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是此序列一次实现, 则在间隔数大于 1 的样本自相关系数中, 大约有 95% 落在 $\pm 1.96/\sqrt{N}$ 的范围内。这可用于检验过程数据是否存在自相关性 [22]。5.2 介绍了一个真实的示例, 展示了带有置信带的样本自相关函数 ACF 在过程数据自相关性检验中的应用。

b) 游程检验:

样本自相关函数 ACF 的使用, 是基于平稳过程的假设, 过程均值是一个常数。然而, 如果过程的均值不是常数, 自相关函数 ACF 图则可能错误地探测出强自相关性。在这种情况下, 若仍使用自相关函数 ACF 来检验过程是否具有自相关性, 就可能会得到错误的结果。而游程检验能对自相关函数 ACF 图进行补充。对随机性的游程检验是一种基于上下游程的非参数检验 [22]。参考文献 [22] 的第 99~101 页给出了一个使用游程检验的例子。

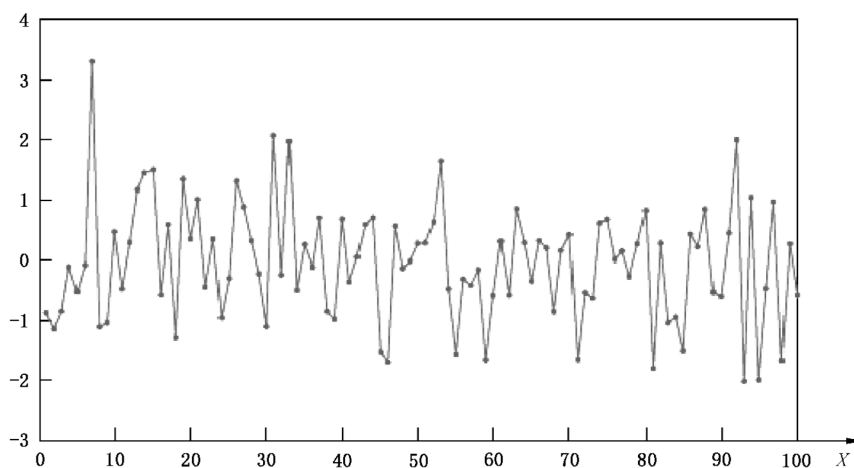
附录 B

(资料性)

传统控制图在自相关数据上的表现

过程数据中的自相关性会影响传统控制图进行统计过程控制的表现。下面的例子展示了正自相关性对多种传统控制图的影响。模拟 $0 < \phi < 1$ 、正态分布随机噪音的平稳一阶自回归 AR(1) 过程,生成自回归数据。所生成的均值为 0、白噪音方差为 1、链长为 100、 ϕ 分别为 0、0.25、0.5、0.75、0.9 的 AR(1) 过程的五次实现,分别在图 B.1 到图 B.5 中进行了展示,以给出自相关过程的影响。

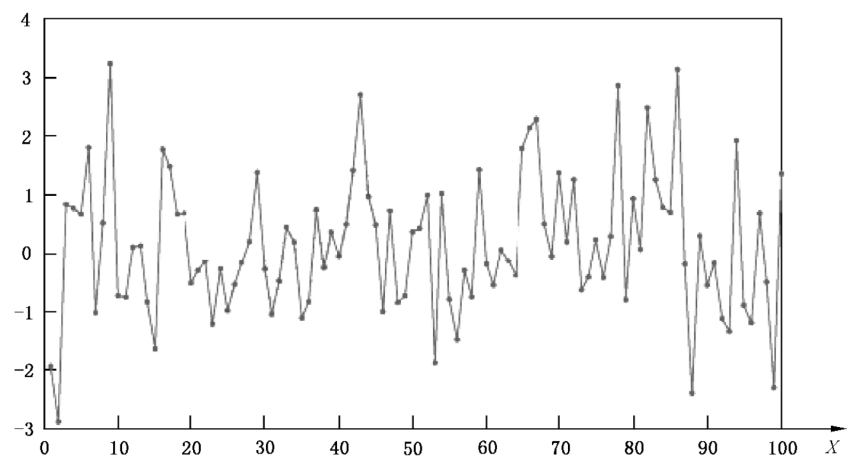
本附录用于展示在监测过程均值变化中,不同程度的自相关性对受控状态的平均链长 (ARL) 所代表的第一类错误以及对失控状态的平均链长所代表的第二类错误的影响。ARL 是在出现一个信号之前采集的平均样本数(见 GB/T 17989.4:2020 中的 3.1.7)。理想的控制图期望受控状态的 ARL 尽可能大,失控状态的 ARL 尽可能小。也就是说,对理想的控制图而言,若过程均值未发生变化,ARL 宜取较大值;若过程均值发生变化,ARL 宜取较小值,以快速提示过程均值出现了变动。在模拟中,自相关程度的变化通过改变 AR(1) 过程中的 ϕ 值实现。对于 ϕ 的每个取值,分别计算过程处于受控状态和失控状态下的 ARL 值。通过模拟,以研究 AR(1) 过程的每种情况的影响。每种情况至少生成 2 000 个时间序列。对于均值未发生变化的过程,计算每个序列的链长并取平均,以得到受控状态的平均链长。对于不稳定的过程,均值在序列的模拟过程中会发生变化,然后据此计算链长。此时,只考虑过程均值的阶跃变化 Δ ,以过程标准差倍数表示,即均值突然发生变化,然后稳定在一个新的水平上。计算 2 000 个序列链长的平均值,以得到失控状态的平均链长。自相关性对单值 $\bar{X}$ 图、CUSUM 图和 EWMA 图的影响亦得到了研究。单值 $\bar{X}$ 图使用 3σ 控制限。EWMA 图的平滑参数 λ 取 0.2,同样使用 3σ 控制限。CUSUM 图使用参考文献[23]和参考文献[3]里提到的 ARL。表格化 CUSUM 图中的参数取 $h=5.0$, $k=0.5$ 。图 B.1~图 B.5 给出了取值分别为 0、0.25、0.5、0.75、0.9 时 AR(1) 过程实现的图示。



标引序号说明:

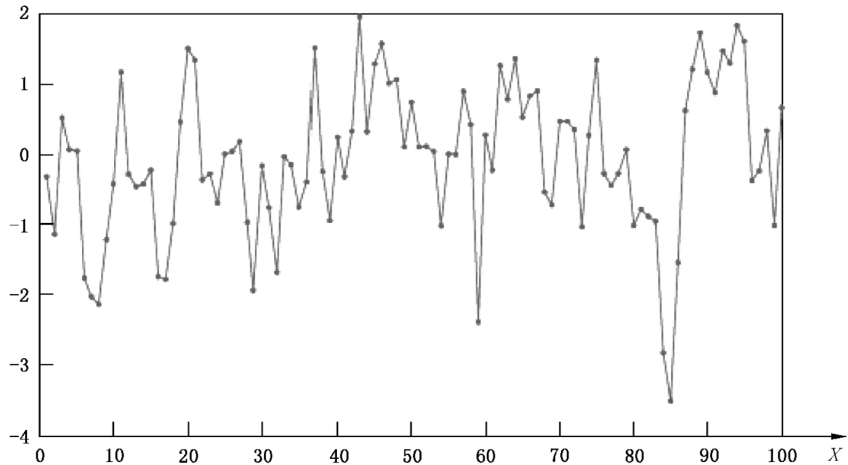
X——时间。

图 B.1 $\phi=0$ 时 AR(1) 过程的实现



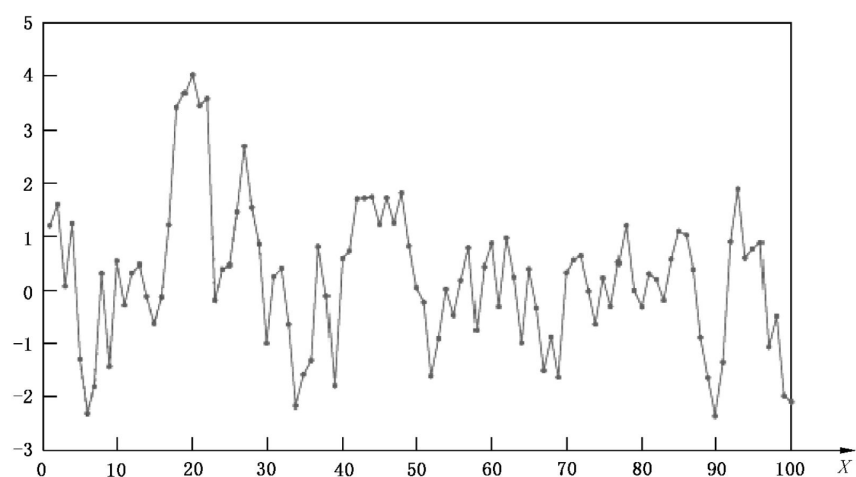
标引序号说明：
X——时间。

图 B.2 $\phi=0.25$ 时 AR(1)过程的实现



标引序号说明：
X——时间。

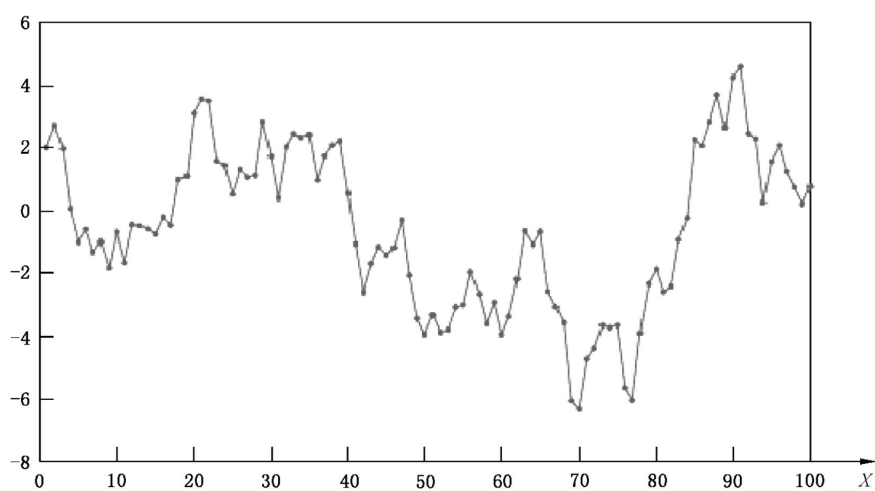
图 B.3 $\phi=0.5$ 时 AR(1)过程的实现



标引序号说明：

X——时间。

图 B.4 $\phi = 0.75$ 时 AR(1)过程的实现



标引序号说明：

X——时间。

图 B.5 $\phi = 0.9$ 时 AR(1)过程的实现

表 B.1 研究结果

ϕ	以 σ 为单位表示的 Δ	X 图 $L=3$	CUSUM 图 $h=5.0 \quad k=0.5$	EWMA 图 $\lambda=0.2 \quad L_z=3$
0 (无自相关)	0	370.40	465.00	547.71
	0.5	155.21	38.40	44.60
	1	43.89	10.40	10.75
	2	6.30	4.01	3.73
	3	2.00	2.57	2.38

表 B.1 研究结果 (续)

ϕ	以 σ 为单位表示的 Δ	X 图 $L=3$	CUSUM 图 $h=5.0 \quad k=0.5$	EWMA 图 $\lambda=0.2 \quad L_z=3$
0.25 (弱自相关)	0	381.60	119.35	139.50
	0.5	160.53	30.02	32.81
	1	46.61	10.58	10.72
	2	7.25	4.16	3.85
	3	2.21	2.64	2.41
0.5 (中等强度自相关)	0	400.74	49.23	56.00
	0.5	181.15	25.76	26.96
	1	56.42	11.43	10.79
	2	9.16	4.34	4.00
	3	2.60	2.64	2.50
0.75 (中等偏强自相关)	0	496.04	30.98	31.45
	0.5	235.98	22.74	21.82
	1	74.33	12.67	11.30
	2	14.42	4.73	4.56
	3	3.59	2.83	2.58
0.9 (强自相关)	0	833.59	29.02	26.24
	0.5	413.03	24.40	21.09
	1	157.72	15.38	13.19
	2	27.09	5.84	5.08
	3	6.24	2.85	2.72

研究结果如表 B.1 所示。表中第一列是自相关的程度,从没有自相关 $\phi=0$ 到 $\phi=0.9$ 。第二列针对每个 ϕ 值,给出了均值变化的程度,以过程标准差倍数表示(0、0.5、1.0、2.0、3.0 个标准差)。第三列给出了单值 X 图的表现。自相关的存在不会对受控状态的 ARL 产生负面影响;当 $\phi \leq 0.25$ 时,自相关对失控状态的 ARL 影响较小;然而当 $\phi \geq 0.5$ 时,自相关对 ARL 影响较大;当 ϕ 增大时,受控状态与失控状态的 ARL 都会增大;当均值变化较小时,这种影响更显著。总之,对于中等强度到高等强度的自相关,单值 X 图很难监测到均值的小幅变化。

表中第四列和第五列分别给出了 CUSUM 图和 EWMA 图的表现。当过程数据呈正自相关时,即使 ϕ 只有 0.25 这样弱的自相关,也会对受控状态的 ARL 产生负面影响;当 $\phi=0.25$ 时,CUSUM 图和 EWMA 图的受控状态 ARL 分别从 $\phi=0$ 时的 465.00 和 547.71 减少到 119.35 和 139.50,表明即使只出现微弱的自相关,CUSUM 图和 EWMA 图仍会频繁发出错误警报;另一方面,自相关性对 CUSUM 图和 EWMA 图的失控状态 ARL 的影响相对较小。因此,当过程出现正自相关时,会严重影响 CUSUM 图和 EWMA 图的受控状态 ARL,发出错误警报。

这里仅给出了正自相关序列的结果。因为实际工作中,正自相关性是最常见的情形,如生物学。对于负自相关性影响的研究,见参考文献[5]。同样,只考虑均值出现的阶跃变化。

参 考 文 献

- [1] GB/T 17989.4—2020 控制图 第4部分:累积和控制图
- [2] ALWAN L. C.; ROBERT H. V.(1988], Time-series modelling for statistical process control, *Journal of Business & Economic Statistics*, 6(1), 87-95.
- [3] RUNGER G. C., WILLEMAIN T. R., PRABHU S.(1995), Average run lengths for CUSUM control charts applied to residuals, *Communication in Statistics—Theory and Methods*, 24(1), 273-282.
- [4] Lu C. W., REYNOLDS M. R.(1999) , EWMA control charts for monitoring the mean of autocorrelated processes, *Journal of Quality Technology*, 31(2), 166-188.
- [5] ZHANG N. F.(2000), Statistical control charts for monitoring the mean of a stationary process, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 66(3), 249-258.
- [6] WARDELL D. G., MOSKOWWITZ H., PLANTE R. D.(1994), Run-length distributions of special- cause control charts for correlated processes, *Technometrics*, 36, 3-17.
- [7] ZHANG N. F.(1997) , Detection capability of residual chart for autocorrelated journal of *Applied Statistics*, 24(4), 475-492.
- [8] DODSON B.(1995]; Control charting dependent data: A case study, *Quality Engineering*, 7(4), 757—768.
- [9] WOODWARD W. A., GRAY H, L., ELLICOTT A. C., (2012) *Applied time series analysis*. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [10] VANBRACKLE L., REYNOLDS M. R.(1997), EWMA and CUSUM control charts in the presence of correlation, *Communications in Statistics—Simulation and computation*, 26(3), 979-1008.
- [11] ZHANG N. F.(1998] , A statistical control chart for stationary process data, *Technometrics*, 40(1), 24-38.
- [12] Box G. E. R, JENKINS G. M., REINSSL G. C., (1994) *Time series analysis: Forecasting and control* (3rd ed.), Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- [13] YASHCHIN E.(1993), Performance of CUSUM control schemes for serially correlated observations, *Technometrics*, 35(1), 37-52.
- [14] Lu C. W., REYNOLDS M. R.(2001), CUSUM charts for monitoring an autocorrelated process, *Journal of Quality Technology*, 33(3), 316-334.
- [15] MACGREGOR J. F., HARRIS T. J.(1993), The exponentially weighted moving variance, *Journal of Quality Technology*, 25(2), 106-118.
- [16] Lu C. W.; REYNOLDS M. R.(1999), Control charts for monitoring the mean and the variance of autocorrelated processes, *Journal of Quality Technology*, 31(2), 259-274.
- [17] ZHANG N. F., PINTAR A. L.(2015), Monitoring process variability for stationary process data, *Quality and Reliability Engineering International*, 31(8), 1383-1396.
- [18] MACGREGOR J. F.(1976), Optimal choice of the sampling interval for discrete process control, *Technometrics*, 18(2), 151-160.
- [19] BRILLINGER D. R.(1973), Estimation of the mean of a stationary time series by sampling, *Journal of Applied Probability*, 10, 419-431.
- [20] ZHANG N. F.(2006); THE BATCHED MOVING AVERAGES OF MEASUREMENT

DATA AND THEIR APPLICATIONS IN DATA TREATMENT, MEASUREMENT, (39), 864-875.

[21] BROCKWELL P.J., DAVIS R.A., (1991) TIMES SERIES: THEORY AND METHODS (2ND ED.). NEW YORK, NY: SPRINGER-VERLAG.

[22] WINKEL P, ZHANG N.F., (2007) STATISTICAL DEVELOPMENT OF QUALITY IN MEDICINE. CHICHESTER, UK: JOHN WILEY & SONS, LTD.

[23] LUCAS J.M.(1976), THE DESIGN AND OF V-MASK CONTROL SCHEMES, JOURNAL OF QUALITY TECHNOLOGY, 8(1), 1-12.

中 华 人 民 共 和 国
国 家 标 准

生产过程质量控制统计方法 控制图

第 9 部分:平稳过程控制图

GB/T 17989.9—2022/ISO 7870-9:2020

*

中国标准出版社出版发行
北京市朝阳区和平里西街甲 2 号(100029)
北京市西城区三里河北街 16 号(100045)

网址:www.spc.org.cn

服务热线:400-168-0010

2022 年 3 月第一版

*

书号:155066·1-69688

版权专有 侵权必究



GB/T 17989.9-2022