



# 中华人民共和国国家标准

GB/T 17989.7—2022

## 生产过程质量控制统计方法 控制图 第7部分：多元控制图

Statistical method of quality control in production process—  
Control charts—Part 7: Multivariate control charts

(ISO 7870-7:2020, Control charts—Part 7: Multivariate control charts, MOD)

2022-03-09 发布

2022-10-01 实施

国家市场监督管理总局  
国家标准化管理委员会 发布

# 目 次

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 前言 .....                              | I  |
| 引言 .....                              | II |
| 1 范围 .....                            | 1  |
| 2 规范性引用文件 .....                       | 1  |
| 3 术语和定义 .....                         | 1  |
| 4 符号和缩略语 .....                        | 1  |
| 4.1 符号 .....                          | 1  |
| 4.2 缩略语 .....                         | 3  |
| 5 多元控制图的应用目的和分类 .....                 | 3  |
| 5.1 多元控制图的应用目的和适用条件 .....             | 3  |
| 5.2 多元控制图的分类 .....                    | 4  |
| 6 监测均值偏移的多元控制图(不作加权处理) .....          | 5  |
| 6.1 概述 .....                          | 5  |
| 6.2 监测过程均值的控制图( $n>1$ ) .....         | 6  |
| 6.3 监测过程均值的控制图( $n=1$ ) .....         | 7  |
| 6.4 不作加权处理的多元控制图监测均值偏移的总结和选择 .....    | 7  |
| 6.5 可查明原因的监测 .....                    | 8  |
| 7 监测均值偏移的多元控制图(进行加权处理) .....          | 9  |
| 8 监测过程散布的多元控制图 .....                  | 10 |
| 9 失控信号的解释 .....                       | 10 |
| 附录 A (资料性) 多元统计过程控制的实例 .....          | 11 |
| 附录 B (资料性) MEWMA 控制图的实例 .....         | 14 |
| 附录 C (资料性) $\mu$ 和 $\Sigma$ 的估计 ..... | 21 |
| 参考文献 .....                            | 23 |

## 前 言

本文件按照 GB/T 1.1—2020《标准化工作导则 第1部分：标准化文件的结构和起草规则》的规定起草。

本文件是 GB/T 17989 的第7部分。GB/T 17989 已经发布了以下部分：

- 控制图 第1部分：通用指南；
- 控制图 第2部分：常规控制图；
- 控制图 第3部分：验收控制图；
- 控制图 第4部分：累积和控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第5部分：特殊控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第6部分：指数加权移动平均控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第7部分：多元控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第8部分：短周期小批量的控制方法；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第9部分：平稳过程控制图。

本文件修改采用 ISO 7870-7:2020《控制图 第7部分：多元控制图》。

本文件与 ISO 7870-7:2020 相比做了下述结构调整：

- 调整第4章中符号与缩略语的顺序：符号在前，缩略语在后。

本文件与 ISO 7870-7:2020 的技术差异及其原因如下：

- 删除了缩略语“PCA”和“PLS”，出现次数较少，使用中文常用名称代替；
- 附录 C.1 第1段结尾增加“ $n > d$ ”，明确取值范围；
- 公式中的分位数表示方式参照 GB/T 3358.2 进行调整。

本文件做了下列编辑性改动：

- 将标准名称改为《生产过程质量控制统计方法 控制图 第7部分：多元控制图》；
- 将“ $y_1$ ”“ $y_2$ ”“ $\bar{y}_1$ ”“ $\bar{y}_2$ ”分别修改为“ $x_1$ ”“ $x_2$ ”“ $\bar{x}_1$ ”“ $\bar{x}_2$ ”，原文错误；
- 将 5.2 中的“0.5 $\sigma$  到 2 $\sigma$  的偏移”修改为“0.5 倍标准差到 2 倍标准差的偏移”；
- 将第6章中“协方差向量”修改为“协方差矩阵”；
- 附录 B 中的特性，根据案例资料的原始来源，将特性“速度”和“温度”，还原为企业提供的真实质量特性“线速”和“火焰温度”；
- 附录 B 中图 B.1、图 B.2、图 B.3 的图例，“ $j$ ”为“观测序号”而非“子组序号”；“ $Y^2$ ”为“ $Y^2$  统计量”而非解释性的“相对于受控过程的过程均值的 MEWMA 的距离平方”。

请注意本文件的某些内容可能涉及专利。本文件的发布机构不承担识别专利的责任。

本文件由全国统计方法应用标准化技术委员会(SAC/TC 21)提出并归口。

本文件起草单位：清华大学、青岛市质量管理协会、海尔集团公司、一缆天下科技有限公司、河南省标准化研究院、内蒙古蒙牛乳业(集团)股份有限公司、中国标准化研究院、聊城卓群汽车部件有限公司。

本文件主要起草人：孙静、张静怡、张德华、赵立国、邵继田、邵继梅、赵国敏、李丽莹、马文丽、马利军、张帆、许艳锋。

## 引 言

控制图是过程控制中常用的统计工具,用来监测过程中的偏移,保持过程稳定。GB/T 17989 控制图系列标准分为以下 9 部分:

- 控制图 第 1 部分:通用指南。目的在于给出控制图基本术语、原理及分类,以及选择控制图的指南。
- 控制图 第 2 部分:常规控制图。目的在于确立使用常规控制图进行过程控制的指南。
- 控制图 第 3 部分:验收控制图。目的在于确立验收控制图进行过程控制的使用指南,并规定了确定子组样本量、行动限、和决策准则的一般程序。
- 控制图 第 4 部分:累积和控制图。目的在于确立应用累积和技术进行过程检测、控制和回顾性分析的统计方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 5 部分:特殊控制图。目的在于确立理解和应用特殊控制图进行统计过程控制的指南。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 6 部分:指数加权移动平均控制图。目的在于确立理解和应用指数加权移动平均(EWMA)控制图进行统计过程控制的指南。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 7 部分:多元控制图。目的在于确立构建和应用多元控制图进行统计过程控制的指南,并建立了使用和理解计量数据多元控制图的常规方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 8 部分:短周期小批量的控制方法。目的在于确立子组大小为 1 时,应用常规计量控制图检测短周期和小批量生产过程的方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 9 部分:平稳过程控制图。目的在于确立构建和应用控制图对平稳过程进行控制的指南。

当有若干个质量特性需要被同时控制时,通常的做法是每个特性单独绘制一张(单变量)控制图。遗憾的是,当特性之间存在强相关时,这种做法就可能对结果带来误导。当涉及需要监测存在相关关系的多个变量的过程控制问题时,需要应用多元统计过程控制(MSPC)。多元统计过程控制最有用的工具是多元控制图。针对质量特性之间的相关关系,可利用多元控制图进行过程评估和统计过程控制。

多元统计过程控制旨在当过程出现可查明原因、过程未处于统计控制状态时,发出警报。通过不断的努力,系统地消除导致过程异常波动的可查明原因,促使过程回到统计控制状态。一旦过程处于统计控制状态,其性能就是可预测的,且能够评估该过程满足规范要求的能力。

本文件的主要目的是为如何应用多元控制图进行统计过程控制提供指南,给出了如何针对多元问题评价过程是否处于统计控制状态。GB/T 17989.6 提供了服从多元正态分布或近似服从多元正态分布的过程或产品特性的过程能力的计算方法。

多元控制图用于监测多变量特性,其中的一个或多个特性与其他特性之间往往存在关联关系。

# 生产过程质量控制统计方法 控制图

## 第 7 部分：多元控制图

### 1 范围

本文件描述了构建和应用多元控制图进行统计过程控制的指南,并建立了使用和理解计量数据多元控制图的常规方法。

本文件适用于计量型多变量特性的统计过程控制。

本文件没有对主成分分析和偏最小二乘法在多元统计过程控制中的应用予以介绍。

注：本文件给出了迄今为止实际应用多元控制图的现状,并没有给出此领域的科学研究现状。

### 2 规范性引用文件

下列文件中的内容通过文中的规范性引用而构成本文件必不可少的条款。其中,注日期的引用文件,仅该日期对应的版本适用于本文件;不注日期的引用文件,其最新版本(包括所有的修改单)适用于本文件

GB/T 3358.2 统计学词汇及符号 第 2 部分:应用统计(GB/T 3358.2—2009,ISO 3534-2: 2006, IDT)

### 3 术语和定义

GB/T 3358.2 界定的以及下列术语和定义适用于本文件。

#### 3.1

**多变量特性 multivariate characteristics**

多变量,单独的或与产品质量相关的  $d$  个变量组成的特征集。

注 1: 根据 GB/T 17989.2,这些变量被用来表示质量特性  $X_i$ ,其中  $i=1,2,\cdots,d$ 。

注 2: 多变量特性的观测值可表示为向量  $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_d)^T$ 。因此,多变量可被视为产品的特征向量。多变量的值可由  $d$ -维特征空间中的点表示。

注 3: 组成向量的所有单变量,在相同的产品或对象中是可测量的。

注 4: 如果使用统计方法来描述多变量,那么该向量被视为  $d$ -维随机向量。

#### 3.2

**置信区域 confidence region**

给定的置信水平所定义的  $d$ -维多变量特性的  $d$ -维区域。

注 1: 置信区域由  $d$ -维空间中的线、曲面或超曲面限定。

注 2: 置信区域的形状和尺寸由一个或多个参数来规定。

### 4 符号和缩略语

#### 4.1 符号

下列符号适用于本文件。

|                                              |                                                            |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| $B_{1-\alpha}(v1, v2)$                       | 自由度为 $v1$ 和 $v2$ 的 $\beta$ 分布的 $1-\alpha$ 分位数              |
| $d$                                          | 多变量特性的维数                                                   |
| $D_j^2$                                      | 阶段 II 的 $\chi^2$ 控制图的打点统计量                                 |
| $E( \mathbf{S} )$                            | $ \mathbf{S} $ 的均值                                         |
| $F_{1-\alpha}(v1, v2)$                       | 自由度为 $v1$ 和 $v2$ 的 $F$ 分布的 $1-\alpha$ 分位数                  |
| $h$                                          | 多元指数加权移动平均 MEWMA 控制图的上控制限                                  |
| $L_{CL}$                                     | 下控制限                                                       |
| $m$                                          | 子组的数量                                                      |
| $n$                                          | 子组大小                                                       |
| $N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ | 参数为 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的 $d$ 维正态分布 |
| $s_{ab}$                                     | $n=1$ 时, 第 $a$ 个和第 $b$ 个质量特性之间的协方差                         |
| $s_{abj}$                                    | $n>1$ 时, 第 $j$ 个子组的第 $a$ 个和第 $b$ 个质量特性之间的协方差               |
| $s_i^2$                                      | $n=1$ 时, 第 $i$ 个质量特性的方差                                    |
| $s_{ij}^2$                                   | $n>1$ 时, 第 $j$ 个子组的第 $i$ 个质量特性的方差                          |
| $\bar{s}_i^2$                                | $n>1$ 时, $m$ 个子组的第 $i$ 个质量特性的方差的平均值                        |
| $\bar{s}_{ab}$                               | $n>1$ 时, $m$ 个子组的第 $a$ 个和第 $b$ 个质量特性之间的协方差的平均值             |
| $\mathbf{S}$                                 | $n=1$ 时, 样本的协方差矩阵                                          |
| $\bar{\mathbf{S}}$                           | $n>1$ 时, 样本的协方差矩阵                                          |
| $ \mathbf{S} $                               | 样本协方差矩阵的行列式                                                |
| $T_j^2$                                      | 阶段 I 的 $T^2$ 控制图的打点统计量                                     |
| $T_f^2$                                      | 阶段 II 的 $T^2$ 控制图的打点统计量                                    |
| $tr$                                         | 迹算子                                                        |
| $U_{CL}$                                     | 上控制限                                                       |
| $V( \mathbf{S} )$                            | $ \mathbf{S} $ 的方差                                         |
| $x_{ij}$                                     | $n=1$ 时, 第 $i$ 个质量特性的第 $j$ 个观测值                            |
| $x_{ijk}$                                    | $n>1$ 时, 第 $j$ 个子组的第 $i$ 个质量特性的第 $k$ 个观测值                  |
| $\bar{x}_{ij}$                               | $n>1$ 时, 第 $j$ 个子组的第 $i$ 个质量特性的样本均值                        |
| $\bar{\bar{x}}_i$                            | $n>1$ 时, $m$ 个组的第 $i$ 个质量特性的样本均值的平均值                       |
| $\mathbf{x}$                                 | 观测向量                                                       |
| $\mathbf{x}_j$                               | $n=1$ 时, 第 $j$ 个观测向量                                       |
| $\mathbf{x}_f$                               | $n=1$ 时, 未来的单个观测向量                                         |
| $\bar{\mathbf{x}}$                           | $n=1$ 时, 样本均值向量                                            |
| $\bar{\mathbf{x}}_j$                         | $n>1$ 时, 第 $j$ 个合理子组的样本均值                                  |
| $\bar{\mathbf{x}}_f$                         | $n>1$ 时, 未来的合理子组的均值                                        |
| $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$                     | $n>1$ 时, 样本均值向量                                            |
| $\{\bar{\mathbf{x}}_i\}$                     | 向量 $\bar{\mathbf{x}}$ 的第 $i$ 个元素                           |
| $Y_j^2$                                      | MEWMA 控制图的打点统计量                                            |
| $Z_j$                                        | MEWMA 统计量                                                  |
| $\chi_{1-\alpha, v}^2$                       | 自由度为 $v$ 的 $\chi^2$ 分布的 $1-\alpha$ 分位数                     |
| $\delta$                                     | 均值向量偏移量                                                    |
| $\boldsymbol{\lambda}$                       | MEWMA 的平滑参数向量                                              |
| $\lambda$                                    | EWMA 的平滑参数, $0 < \lambda \leq 1$                           |

|                  |                        |
|------------------|------------------------|
| $\mu$            | 多变量特性的均值向量             |
| $\mu_0$          | 预先给定的多变量特性的均值向量        |
| $\rho_{x_1,x_2}$ | $x_1$ 与 $x_2$ 间的相关系数   |
| $\Sigma$         | 多变量特性的协方差矩阵            |
| $\Sigma_0$       | 预先给定的多变量特性的协方差矩阵       |
| $\Sigma_{Z_j}$   | MEWMA 统计量 $Z_j$ 的协方差矩阵 |
| $(\cdot)^{-1}$   | 逆算子                    |
| $(\cdot)^T$      | 转置算子                   |

4.2 缩略语

- 下列缩略语适用于本文件。
- SPC 统计过程控制 (statistical process control)
- MSPC 多元统计过程控制 (multivariate statistical process control)
- UCL 上控制限 (upper control limit)
- LCL 下控制限 (lower control limit)
- ARL 平均链长 (average run length)
- EWMA 指数加权移动平均 (exponential weighted moving average)
- MEWMA 多元指数加权移动平均 (multivariate exponential weighted moving average)

5 多元控制图的应用目的和分类

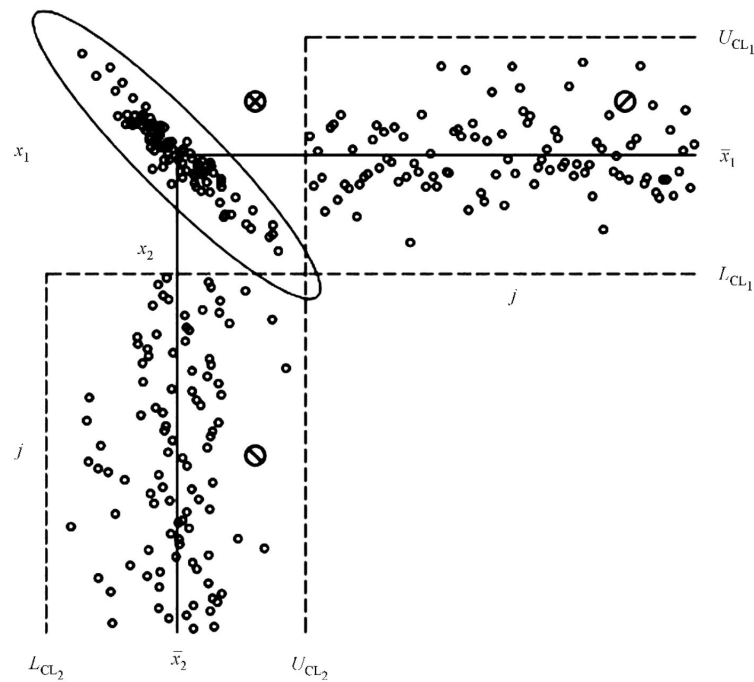
5.1 多元控制图的应用目的和适用条件

许多情况下,需要同时监测两个或多个存在关联关系的质量特性。对每个质量特性应用常规控制图进行监测,是存在问题的,如图 1 所示。为便于展示,只考虑两个质量特性( $x_1, x_2$ )。

假设过程处于只存在偶然因素的统计控制状态, $x_1$  和  $x_2$  服从正态分布,且  $x_1$  和  $x_2$  存在相关关系( $\rho_{x_1,x_2}=0.94$ ),如图 1 中  $x_1$  和  $x_2$  形成的点子所示。图中的椭圆给出了处于统计控制状态的过程的 0.997 3 分位数的轮廓。这里的 0.997 3 对应着常规控制图中 0.002 7 虚发警报的风险。图中的点子表示来自该分布的一组观测值。图 1 同样给出了  $x_1, x_2$  与观测顺序(时间)构成的单值控制图,以及与相应的上下控制限(0.998 65 分位数)比对所得到的观测结果。

查看两张单值控制图,显示过程处于统计控制状态,没有任何迹象表明:过程存在问题。然而,真实的情况只会在以  $x_1$  和  $x_2$  为二元变量进行作图分析时显现出来。由⊗代表的产品批次显然落在置信区域外,表明该批次的产品与处于正常“统计控制状态”产品总体是不同的。

通常某一产品的多个质量特性并不彼此独立,那么就没有简便的方法来监测联合控制过程是否出现失控。需要关注存在相关关系的多个变量的过程控制问题,被称为多元质量控制问题。该问题很重要,因为自动检查程序使得测量每个产品单元的诸多参数变得很容易。例如,许多化工厂、流程型企业以及半导体制造商,经常需要维护拥有着数百个变量的过程和质量数据的数据库。使用单变量 SPC 控制方法,监控或分析这些数据通常是无效的。考虑到产品或工艺特性之间的依赖关系,需要应用多元控制图来进行统计过程控制。



标引序号说明：

- $j$  —— 观测序号；
- $\bar{x}_1$  ——  $x_1$  的均值；
- $\bar{x}_2$  ——  $x_2$  的均值；
- $U_{CL1}$  ——  $x_1$  的上控制限；
- $L_{CL1}$  ——  $x_1$  的下控制限；
- $U_{CL2}$  ——  $x_2$  的上控制限；
- $L_{CL2}$  ——  $x_2$  的下控制限；
- ⊙ ——  $x_1$  对应的点；
- ⊗ ——  $x_2$  对应的点；
- ⊗ ——  $(x_1, x_2)$  对应的点。

图 1 二维变量的质量控制

如果过程变量的个数不太多——10 个或更少，那么，多元控制图会非常好用。然而，随着变量个数的增加，传统的多元控制图监测过程偏移的效率会减弱。这种情况下，常见的做法是降低问题的维度，可使用投影的方法如主成分分析和偏最小二乘法来完成。这两种方法都是对受控过程的历史数据集建模，然后判断随后获得的观测值是否符合该模型。

使用统计过程控制 SPC 分析单个变量时，往往用正态分布来描述连续质量特性的行为。当面对多个变量的情况时，使用相同的方法，多元正态分布被用来作为多变量特性的基本假设。

## 5.2 多元控制图的分类

如果多变量特性可认为是服从均值向量为  $\mu$  和协方差矩阵为  $\Sigma$  的多元正态分布的随机向量（见附录 C），那么显然从应用多元过程控制的角度，多元控制图可分别被用来监控均值偏移和过程散布。因此，多元控制图可分为：

- a) 监测均值偏移的多元控制图；
- b) 监测过程散布的多元控制图。

对于均值偏移,不作加权处理的多元控制图就类似于常规控制图中的  $\bar{X}$  图或单值图,只使用当前样本的信息,对均值向量的小幅和中幅偏移不敏感。进行加权处理的多元控制图(如多元 EWMA 控制图)被用于解决此类问题。就像 EWMA 图常用于监测过程均值的小偏移一样,多元 EWMA 控制图能更迅速地监测到 0.5 倍标准差到 2 倍标准差的偏移。故而,监测均值偏移的多元控制图可分为:

- 1) 不作加权处理的多元控制图(见第 6 章),如  $\chi^2$  和  $T^2$  图;
- 2) 进行加权处理的多元控制图(见第 7 章),如多元 EWMA 控制图。

图 2 给出了选择多元控制图的路径。

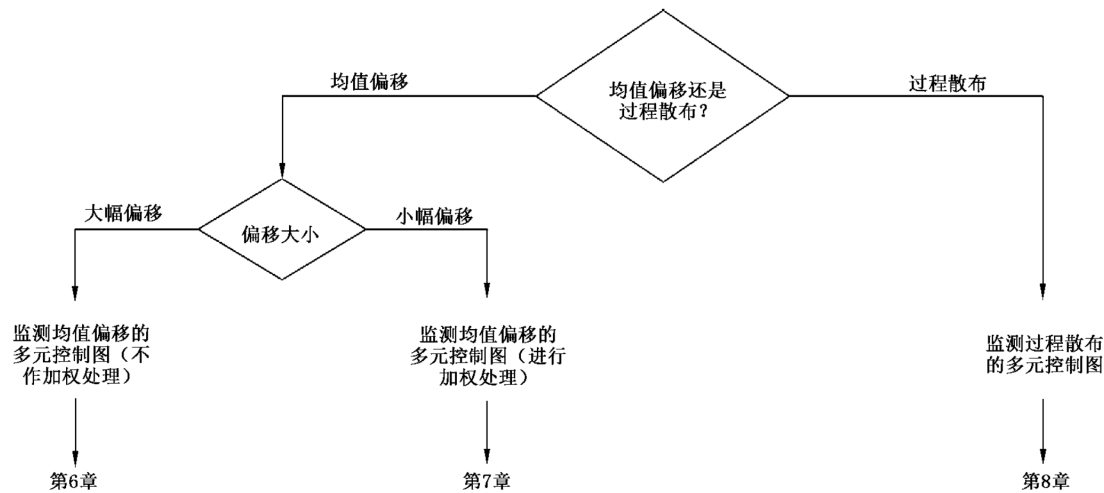


图 2 多元控制图的选择路径

6 监测均值偏移的多元控制图(不作加权处理)

6.1 概述

多元控制图会有两种不同的情况:

- a) 过程参数值未预先给定的情况;
- b) 过程参数值被预先给定的情况。

预先给定的或已知的过程参数值,可由目标值、顾客要求、基于处于统计控制状态的过程数据所得到的估值予以设定。

应用控制图有两个不同的阶段:

- 1) 阶段 I:应用控制图进行回顾性监测,对自第一个子组被采集所获得的全部数据所对应的过程进行监测,判断过程是否处于统计控制状态。一旦完成该阶段的监测,控制图就界定了处于统计控制状态的过程,被称作控制图的回顾性应用;
- 2) 阶段 II:应用控制图用于监测当采集到随后的过程子组时是否依旧处于统计控制状态。该阶段,控制图被用来帮助从业人员监测受控过程所出现的任何变化。

另一个关键问题是合理子组的子组大小  $n$ 。若  $n=1$ ,需要慎重对待。故而,需要考虑四种可能:

- 阶段 I 且  $n=1$ ,单个观测值;
- 阶段 I 且  $n>1$ ,合理子组;
- 阶段 II 且  $n=1$ ,单个观测值;
- 阶段 II 且  $n>1$ ,合理子组。

## 6.2 监测过程均值的控制图( $n>1$ )

### 6.2.1 参数值给定的 $\chi^2$ 控制图

假设向量  $\mathbf{x}$  服从  $d$  维正态分布  $N_d(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ , 从过程中采集到  $m$  个子组大小  $n>1$  的子组。此外, 假设向量观测值与时间无关。基于下面的统计量来构建控制图:

$$D_j^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_j - \boldsymbol{\mu}_0)^T \sum_{i=1}^m (\bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\mu}_0), j = 1, 2, \dots, m \quad \dots\dots\dots (1)$$

式中向量  $\bar{\mathbf{x}}_j$  是第  $j$  个合理子组的样本均值,  $\boldsymbol{\mu}_0$  和  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  分别是已知的均值向量和协方差矩阵。

统计量  $D_j^2$  给出了目标值  $\boldsymbol{\mu}_0$  到任意点的加权距离(马氏距离)。如果检验统计量  $D_j^2$  的取值大于上控制限, 则控制图发出警报, 过程未处于统计控制状态。一般的控制图有上下控制限。然而, 此时的多元控制图只有上控制限, 因为远离目标值  $\boldsymbol{\mu}_0$  的点子对应着统计量取值的极端值, 而接近目标值  $\boldsymbol{\mu}_0$  的点子对应着统计量的取值很小甚至为零。

统计量  $D_j^2$  服从自由度为  $d$  的  $\chi^2$  分布。因此, 当均值向量  $\boldsymbol{\mu}_0$  和协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  已知时, 监测过程均值的多元控制图的上控制限为:

$$U_{CL} = \chi_{1-\alpha}^2(d) \quad \dots\dots\dots (2)$$

实际应用中, 为了确定上控制限,  $\alpha$  通常取为 0.1%, 0.2%, 0.5%, 甚至是 1%。例如, 选择 0.2% 意味着, 当过程处于统计控制状态时, 统计量  $D_j^2$  绘制的点超出上控制限, 平均来说, 存在着 0.2% 即千分之二虚发警报的风险。

该控制图被称为阶段 II 的  $\chi^2$  控制图。

### 6.2.2 参数值未知的 $T^2$ 控制图

从过程中采集到 20 多个子组, 应用多元控制图来监测该过程。由所有子组均值的平均值估计出样本均值向量  $\bar{\bar{\mathbf{x}}}$ 。由所有子组协方差矩阵的平均值估计出  $d \times d$  的样本协方差矩阵  $\bar{\mathbf{S}}$ 。见附录 C.1。

用  $\bar{\mathbf{x}}$  替代  $\boldsymbol{\mu}_0$ , 用  $\bar{\mathbf{S}}$  替代  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , 当  $n>1$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_j$  是第  $j$  个合理子组的均值时, 对第  $j$  个子组利用下面的统计量来构建控制图<sup>[4]</sup>:

$$T_j^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\bar{\mathbf{x}}})^T \bar{\mathbf{S}}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\bar{\mathbf{x}}}), j = 1, 2, \dots, m \quad \dots\dots\dots (3)$$

统计值  $T_j^2/c_0(d, m, n)$  服从自由度为  $d$ ,  $(mn-m-d+1)$  的  $F$  分布。此处,

$$c_0(d, m, n) = [d(m-1)(n-1)](mn-m-d+1)^{-1}。$$

参数未知情况下, 监测过程均值的多元控制图的上控制限为:

$$U_{CL} = \frac{d(m-1)(n-1)}{mn-m-d+1} F_{1-\alpha}(d, mn-m-d+1) \quad \dots\dots\dots (4)$$

该控制图称为阶段 I  $T^2$  图。

用阶段 I 采集到的多个子组的  $\bar{\mathbf{x}}$  替代  $\boldsymbol{\mu}_0$ , 用  $\bar{\mathbf{S}}$  替代  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ ,  $n>1$ 。此时,  $\bar{\mathbf{x}}_f$  表示在阶段 II 随后采集到一个合理子组的均值, 基于下面的统计量来构建控制图:

$$T_f^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_f - \bar{\bar{\mathbf{x}}})^T \bar{\mathbf{S}}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_f - \bar{\bar{\mathbf{x}}}) \quad \dots\dots\dots (5)$$

统计量  $T_f^2/c_1(d, m, n)$  服从自由度为  $d$ ,  $(mn-m-d+1)$  的  $F$  分布。这里

$$c_1(d, m, n) = [d(m+1)(n-1)](mn-m-d+1)^{-1}, m \text{ 用以表示阶段 I 的子组数量。}$$

参数未知情况下, 监测过程均值的多元控制图的上控制限为:

$$U_{CL} = \frac{d(m+1)(n-1)}{mn-m-d+1} F_{1-\alpha}(d, mn-n-d+1) \quad \dots\dots\dots (6)$$

该控制图称为阶段 II  $T^2$  图。

### 6.3 监测过程均值的控制图( $n=1$ )

#### 6.3.1 参数值给定的 $\chi^2$ 控制图

使用单个观测值( $n=1$ )基于下面的统计量来构建控制图:

$$D_j^2 = (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_0), j = 1, 2, \dots, m \quad \dots\dots\dots (7)$$

这里  $\mathbf{x}_j$  是第  $j$  个观测值向量( $j=1, 2, \dots, m$ ), 服从  $N_d(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ , 其中  $\boldsymbol{\mu}_0$  和  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  分别是已知的均值向量和协方差矩阵。假设观测值向量与时间无关。统计量  $D_j^2$  服从自由度为  $d$  的  $\chi^2$  分布。因此, 当均值向量  $\boldsymbol{\mu}_0$  和协方差矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  已知时, 监测过程均值的多元控制图的上控制限为:

$$U_{CL} = \chi_{1-\alpha}^2(d) \quad \dots\dots\dots (8)$$

该控制图称为阶段 II  $T^2$  控制图。

#### 6.3.2 参数值未知的 $T^2$ 控制图

从过程中采集到多变量特性的 20 多个观测向量, 估计得出样本均值向量  $\bar{\mathbf{x}}$  和样本协方差矩阵  $\mathbf{S}$ 。应用多元控制图来监测该过程。见 C.2。

用  $\bar{\mathbf{x}}$  替代  $\boldsymbol{\mu}_0$ , 用  $\mathbf{S}$  替代  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ ,  $\mathbf{x}_j$  是第  $j$  个观测矩阵。显然,  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{S}$  的估计需要用到  $\mathbf{x}_j$ 。

基于下面的统计量来构建控制图:

$$T_j^2 = (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}), j = 1, 2, \dots, m \quad \dots\dots\dots (9)$$

统计量  $T_j^2/d_0(m)$  服从自由度为  $d/2$  和  $\frac{1}{2} \left[ \frac{2(m-1)^2}{3m-4} - d - 1 \right]$  的  $\beta$  分布, 其中  $d_0(m) = (m-1)^2 m^{-1}$ , 参数未知情况下, 监测过程均值的多元控制图的上控制限为:

$$U_{CL} = \frac{(m-1)^2}{m} B_{1-\alpha} \left[ d/2, \left( \frac{2(m-1)^2}{3m-4} - d - 1 \right) / 2 \right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

该控制图称为阶段 I  $T^2$  图。

用阶段 I 采集到的多个观测向量的  $\bar{\mathbf{x}}$  替代  $\boldsymbol{\mu}_0$ , 用  $\mathbf{S}$  替代  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ ,  $\mathbf{x}_f$  表示在阶段 II 随后采集到观测向量, 显然,  $\mathbf{x}_f$  与  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\mathbf{S}$  无关。基于下面的统计量来构建控制图:

$$T_f^2 = (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

统计量  $T_f^2/d_1(m, d)$  服从自由度为  $d$  和  $(m-d)$  的  $F$  分布, 其中

$d_1(m, d) = d(m+1)(m-1)[m(m-d)]^{-1}$ ,  $m$  用以表示阶段 I 的观测向量个数。

参数未知情况下, 监测过程均值的多元控制图的上控制限:

$$U_{CL} = \frac{d(m+1)(m-1)}{m(m-d)} F_{1-\alpha}(d, m-d) \quad \dots\dots\dots (12)$$

该控制图称为阶段 II  $T^2$  图。

### 6.4 不作加权处理的多元控制图监测均值偏移的总结和选择

表 1 给出了在不同情况下, 不作加权处理的多元控制图监测均值偏移时使用的统计量和上控制限 UCL。图 3 给出了这些控制图的选择路径。

表 1 多元控制图概要

| 情况      |       | 统计量                                                                                                                         | 上控制限 UCL                                                                      | 名称                              |
|---------|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $n > 1$ | 参数已知  | $D_j^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_j - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_j - \boldsymbol{\mu}_0)$ | $\chi_{1-\alpha}^2(d)$                                                        | 阶段 II $\chi^2$ 图<br>( $n > 1$ ) |
|         | 阶段 I  | $T_j^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{x}})^T \bar{\mathbf{S}}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_j - \bar{\mathbf{x}})$          | $\frac{d(m-1)(n-1)}{mn-m-d+1} F_{1-\alpha}$<br>( $d, mn-m-d+1$ )              | 阶段 I $T^2$ 图<br>( $n > 1$ )     |
|         | 阶段 II | $T_f^2 = n(\bar{\mathbf{x}}_f - \bar{\mathbf{x}})^T \bar{\mathbf{S}}^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_f - \bar{\mathbf{x}})$          | $\frac{d(m+1)(n-1)}{mn-m-d+1} F_{1-\alpha}$<br>( $d, mn-m-d+1$ )              | 阶段 II $T^2$ 图<br>( $n > 1$ )    |
| $n = 1$ | 参数已知  | $D_j^2 = (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{x}_j - \boldsymbol{\mu}_0)$              | $\chi_{1-\alpha}^2(d)$                                                        | 阶段 II $\chi^2$ 图<br>( $n = 1$ ) |
|         | 阶段 I  | $T_j^2 = (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})$                             | $\frac{(m-1)^2}{m} B_{1-\alpha}(d/2,$<br>$(\frac{2(m-1)^2}{3m-4} - d - 1)/2)$ | 阶段 I $T^2$ 图<br>( $n = 1$ )     |
|         | 阶段 II | $T_f^2 = (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}})$                             | $\frac{d(m+1)(m-1)}{m(m-d)} F_{1-\alpha},$<br>( $d, m-d$ )                    | 阶段 II $T^2$ 图<br>( $n = 1$ )    |

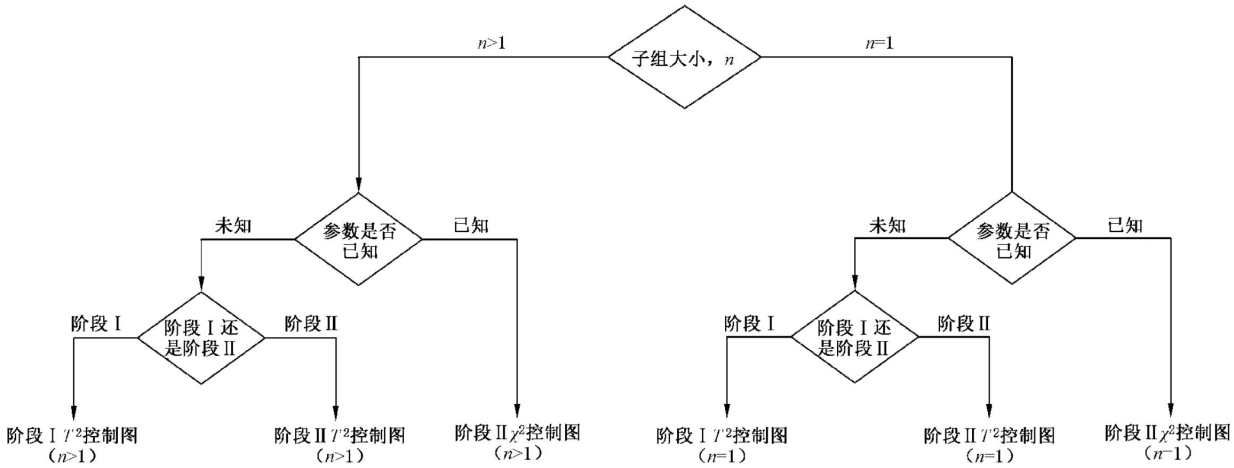


图 3 多元控制图的选择路径

多数情况下,为了利用阶段 I 控制图获得有价值的阶段 II 控制限,需要阶段 I 的样本数量足够大。故而, $m$  的取值宜大于 20,即多于 20 个初始样本,尤其是当子组大小大于 10 时,往往需要 50 多个样本。

6.5 可查明原因的监测

常规  $\bar{x}$  图和  $X$  图经常会用到一组检验模式,如链和趋势,以展示那些偏移不够大、不能通过点子落在控制限外的方法快速监测的较小偏移。不同于常规  $\bar{x}$  图和  $X$  图中点子会落在中心线上侧或中心线

下侧,  $\chi^2$  和  $T^2$  控制图的统计量给出了点子远离目标  $\mu_0$  的距离的平方, 故  $\chi^2$  和  $T^2$  控制图的下控制限 LCL 是不存在的。因此,  $\chi^2$  和  $T^2$  控制图的链和趋势不能像常规  $\bar{x}$  图和  $X$  图那样来监测较小的偏移。对于  $\chi^2$  和  $T^2$  控制图, 只有当监测统计量的取值大于上控制限, 控制图才会发出警报, 表示过程未处于统计控制状态。

为了监测多变量特性的均值是否出现较小的偏移, 需要使用进行加权处理的多元控制图。

7 监测均值偏移的多元控制图(进行加权处理)

第 6 章介绍的  $\chi^2$  和  $T^2$  控制图与常规控制图的设计思路类似, 他们都只使用当前样本中的信息, 相对来说, 对均值向量的小幅和中幅偏移不太敏感。  $T^2$  控制图即可用于阶段 I 和也可用于阶段 II。单变量 EWMA 控制图的提出是为了对小幅偏移的监测更加灵敏, 可将其扩展用以解决多元质量控制问题。与单变量 EWMA 控制图一样, 多元 EWMA 控制图多用作阶段 II 的过程监测。

MEWMA 是单变量 EWMA 的逻辑扩展, 其定义如下:

$$\mathbf{Z}_j = \lambda \mathbf{x}_j + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{j-1}, j = 1, 2, \cdots \cdots \cdots (13)$$

其中  $\mathbf{Z}_0 = \mu_0$ , 即处于统计控制状态的过程均值, 并且

$$\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d), 0 < \lambda_i \leq 1 \cdots \cdots \cdots (14)$$

通常假定  $\lambda_i$  相同  $\lambda_i = \lambda$ 。MEWMA 可写作:

$$\mathbf{Z}_j = \lambda \mathbf{x}_j + (1 - \lambda) \mathbf{Z}_{j-1}, j = 1, 2, \cdots \cdots \cdots (15)$$

常量  $\lambda, 0 < \lambda \leq 1$ , 即 EWMA 的平滑参数。当  $\lambda = 1$  时, MEWMA 的统计量退化为  $\mathbf{x}_j$

当下面条件成立时, MEWMA 控制图发出过程未处于统计控制状态的警报:

$$\mathbf{Y}_j^2 = (\mathbf{Z}_j - \mu_0)^T \sum_{\mathbf{Z}_j}^{-1} (\mathbf{Z}_j - \mu_0) > h \cdots \cdots \cdots (16)$$

其中  $h$  表示 MEWMA 的上控制限 UCL, 且 MEWMA 统计量  $\mathbf{Z}_j$  的协方差矩阵  $\sum_{\mathbf{Z}_j}$  为

$$\sum_{\mathbf{Z}_j} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2j}] \sum_0 \cdots \cdots \cdots (17)$$

这与单变量 EWMA 的结果类似。当  $\lambda = 1$  时, MEWMA 控制图退化为多元控制图。如果  $\mathbf{x}_j$  的均值向量  $\mu_0$  和协方差矩阵  $\Sigma_0$  已知, 当  $\lambda = 1$  时, MEWMA 控制图即为  $\chi^2$  图。

MEWMA 控制图应用 ARL 分析, 通过模拟仿真, 来选定  $\lambda$  和  $h$ 。这里要涉及子组大小、偏移量、给定统计控制状态的  $ARL_0$  以及给定的偏移量  $\delta = [(\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0)]^{1/2}$  的 ARL 性能。选定  $h$  来达成预先给定的统计控制状态  $ARL_0$ 。确定  $\lambda$  以确保对应于均值向量的某偏移量的 ARL 最小, 如表 2 所示, 根据不同的偏移量选择  $\lambda$ 。

- 监测  $\delta = 0.5$  的偏移,  $\lambda$  小于 0.05 是首选。虽然多变量特性的数目很重要, 但  $\lambda = 0.03$  往往是一个不错的选择。
- 监测约为  $\delta = 1$  的偏移, 对于  $d$  的广泛适用范围,  $\lambda = 0.1$  都近乎是最佳选择。
- 监测从  $\delta = 1.5$  到  $\delta = 2$  的偏移,  $\lambda$  最好在 0.15 到 0.25 之间选择。
- 监测高达  $\delta = 3$  的偏移,  $\lambda = 0.4$  是合理的选择。

表 2 基于偏移量  $\delta$  的  $\lambda$  的确定

|              |      |     |             |     |
|--------------|------|-----|-------------|-----|
| 偏移量 $\delta$ | 0.5  | 1   | 1.5 ~ 2     | 3   |
| $\lambda$    | 0.03 | 0.1 | 0.15 ~ 0.25 | 0.4 |

注: 表 2 给出了如何根据偏移量  $\delta$  确定  $\lambda$ 。然而, 提前设定确切的偏移量虽然是可行的, 但是监测过程的小幅偏移而并非唯一给定的偏移量, 显然更合理。GB/T 17989.6 中最常用的  $\lambda$  宜在  $[0.25, 0.5]$  之间取值。

MEWMA 控制图的应用见附录 B。

## 8 监测过程散布的多元控制图

过程的波动情况可以由  $d \times d$  协方差矩阵  $\Sigma$  来进行描述。该矩阵主对角线上的元素是过程变量的方差,非对角线元素是协方差。监控过程散布的一种直接的处理方式是对单变量的控制图进行扩展,相当于对过程协方差矩阵等于给定矩阵  $\Sigma_0$  的假设的显著性进行重复测试。对第  $j$  个子组的控制图打点统计量是:

$$W_j = -dn + dn \ln(n) - n \ln(|\mathbf{A}_j| / |\Sigma|) + \text{tr}(\Sigma^{-1} \mathbf{A}_j)$$

其中,  $\mathbf{A}_j = (n-1)\mathbf{S}_j$ ,  $\mathbf{S}_j$  是子组  $j$  的协方差矩阵,  $\text{tr}$  是迹算子。矩阵的迹是矩阵主对角线元素之和。如果  $W_j$  的取值高于上控制限  $U_{CL} = \chi^2_{1-\alpha}(d(d+1)/2)$ , 则显示过程未处于统计控制状态。

监测过程散布的另一种途径要基于样本的广义方差  $|\mathbf{S}|$ , 即样本协方差矩阵  $\mathbf{S}$  的行列式。例如, 一种方法是使用  $|\mathbf{S}|$  的均值和方差, 也就是  $E(|\mathbf{S}|)$  和  $V(|\mathbf{S}|)$ 、以及  $|\mathbf{S}|$  的大部分概率分布都落在区间  $E(|\mathbf{S}|) \pm 3\sqrt{V(|\mathbf{S}|)}$  内的性质, 并以此确定监测过程散布的上控制限和下控制限。附录 A 给出了观测向量 ( $n=1$ ) 的广义方差控制图的应用示例。

监测过程散布的控制图的多元扩展不像过程均值那样简单明了。能够包容过程散布所遇到的各种问题的常规模型和方法, 实际上是不存在的。多数情况, 特定的问题需要以特定的方式来处理。

各种监测过程散布的技术被介绍, 并在实践中得到广泛接受。尽管将这些技术扩展到多元情况在实践中非常重要, 但是监测多变量过程特性之间的相关性的控制程序却很少受到关注。也许是因为协方差矩阵的统计推断相当复杂。此外, 不同于监测过程均值, 在协方差矩阵中, 要独一无二地确定所出现的偏移并不容易。设计监测过程散布的多元控制程序的另一个挑战是在控制图发出失控警报时对失控过程参数的识别。当然, 多元情况下监控过程散布还是必要的。

应用多元控制图监测过程均值及过程散布, 见附录 A。

## 9 失控信号的解释

多元控制图能够对未处于统计控制状态的过程进行识别。

如果单变量的控制图发出失控信号, 由于单变量控制图只针对某个变量本身, 故而可以较容易地检测到出现的问题并找到解决方案。然而, 对于多元控制图则是无效的, 因为多元控制图涉及多个特性, 而且各个特性之间还存在着相关性。

在多元控制图发出失控信号之后, 识别失控的某个或某些变量, 已经成为学术研究的有趣话题。通常的考虑是查看每个变量对应的单变量控制图。有时应用分解技术, 来识别导致发出失控信号的特定子集。主成分同样可用于分析哪些变量对失控信号的产生负有责任。然而, 失控信号的解释确实是需要进一步研究的开放性问题。

附 录 A  
(资料性)  
多元统计过程控制的实例

A.1 概述

为了评估超声波焊接质量,需对焊接熔深进行监测。深入剖析影响焊接熔深的相关特性,可使用多元控制图。根据以往的经验,选定三个特性:焊接环的深度、插接深度、喇叭口直径。

A.2 观测数据

每月选择一个焊接件进行解剖。子组大小为 1。观测到的焊接环深度、插接深度和喇叭口直径数据如表 A.1 所示。这些数据被用于分析过程是否处于统计控制状态(阶段 I)。根据观测数据获得的相关矩阵如表 A.2 所示。

表 A.1 焊接件的原始观测数据

单位为毫米

| 序号 | 焊接环深度 | 插接深度  | 喇叭口直径 |
|----|-------|-------|-------|
| 1  | 10    | 19.4  | 31    |
| 2  | 8     | 19.2  | 31    |
| 3  | 10    | 19.96 | 30.5  |
| 4  | 10    | 18.8  | 31    |
| 5  | 8     | 18.52 | 26.5  |
| 6  | 5     | 20.4  | 26    |
| 7  | 6     | 20.84 | 29    |
| 8  | 10    | 19.44 | 30    |
| 9  | 10    | 20.36 | 32    |
| 10 | 10    | 20.28 | 33    |
| 11 | 10    | 20.24 | 32    |
| 12 | 4     | 19.08 | 29.5  |
| 13 | 10    | 20.52 | 32.5  |
| 14 | 10    | 20.56 | 31.5  |
| 15 | 4     | 20.12 | 30.5  |
| 16 | 3     | 17.96 | 28    |
| 17 | 6     | 19.08 | 30.5  |
| 18 | 10    | 18.8  | 31    |

表 A.1 焊接件的原始观测数据（续）

单位为毫米

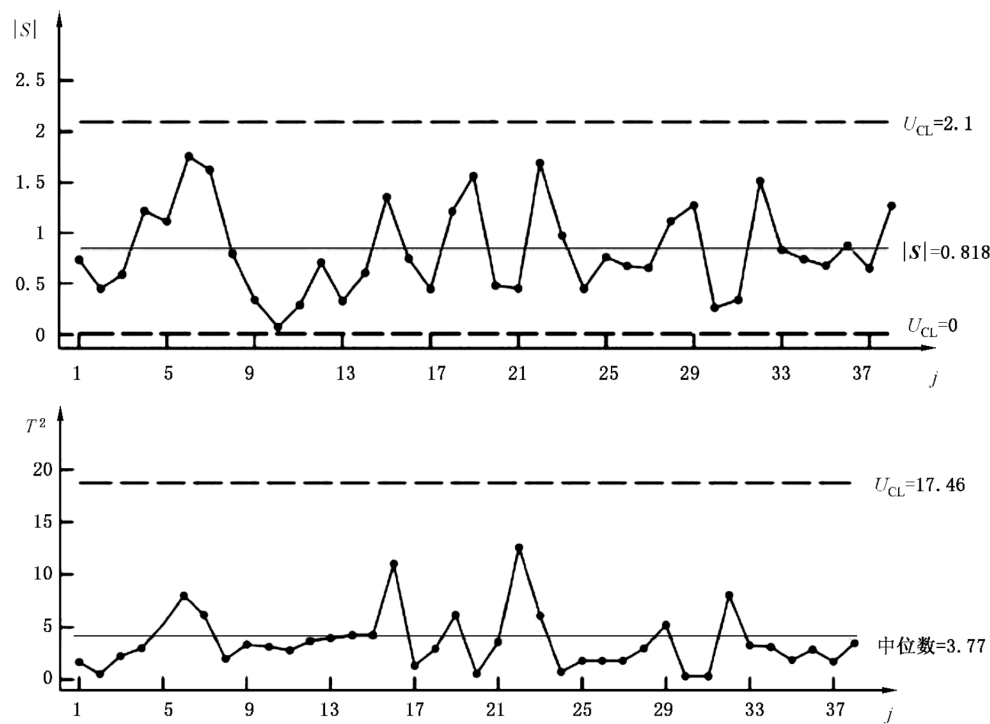
| 序号 | 焊接环深度 | 插接深度  | 喇叭口直径 |
|----|-------|-------|-------|
| 19 | 5     | 20.68 | 32.5  |
| 20 | 6     | 19.64 | 30    |
| 21 | 6     | 18.52 | 27.5  |
| 22 | 4     | 18.16 | 32.5  |
| 23 | 6     | 18.04 | 29    |
| 24 | 8     | 19.28 | 29    |
| 25 | 8     | 19.88 | 28.5  |
| 26 | 8     | 19.2  | 28    |
| 27 | 10    | 19.52 | 32.5  |
| 28 | 10    | 19    | 32.5  |
| 29 | 8     | 19.88 | 26.5  |
| 30 | 8     | 19.4  | 31    |
| 31 | 8     | 19.32 | 31    |
| 32 | 6     | 20    | 35.5  |
| 33 | 6     | 19.44 | 26.5  |
| 34 | 10    | 19.64 | 34    |
| 35 | 5     | 19.4  | 30.5  |
| 36 | 5     | 19.4  | 31.5  |
| 37 | 10    | 19.52 | 32.5  |
| 38 | 5     | 20.32 | 29.5  |

表 A.2 相关系数矩阵

单位为毫米

| 特性    | 焊接环深度 | 插接深度  | 喇叭口直径 |
|-------|-------|-------|-------|
| 焊接环深度 | 1     |       |       |
| 插接深度  | 0.201 | 1     |       |
| 喇叭口直径 | 0.342 | 0.227 | 1     |

A.3 多变量分析



标引序号说明：  
 $j$  ——子组序号；  
 $|S|$  ——广义方差；  
 $T^2$  —— $T^2$  统计量。

图 A.1  $T^2$  控制图和基于广义方差的控制图

从图 A.1 可见,无论  $T^2$  控制图还是监测过程散布的广义方差控制图,所有点都落在控制限内,过程处于统计控制状态。

**附 录 B**  
(资料性)  
**MEWMA 控制图的实例**

**B.1 概述**

在电子产品的组装过程中,焊点的质量和可靠性在很大程度上决定了电子产品的质量。选定监测焊点质量的两个特性:线速和火焰温度。

**B.2 观测数据**

利用自动数据采集设备,收集监控数据。表 B.1 给出了连续观测到的 125 条配对数据。其相关系数矩阵如表 B.2 所示。

**表 B.1 原始数据**

| 序号 | 线速<br>m/min | 火焰温度<br>℃ |
|----|-------------|-----------|
| 1  | 2.24        | 784       |
| 2  | 2.08        | 810       |
| 3  | 1.76        | 789       |
| 4  | 2.20        | 715       |
| 5  | 2.04        | 819       |
| 6  | 2.02        | 866       |
| 7  | 2.06        | 795       |
| 8  | 1.94        | 790       |
| 9  | 1.96        | 814       |
| 10 | 2.02        | 730       |
| 11 | 2.03        | 811       |
| 12 | 1.70        | 787       |
| 13 | 2.15        | 808       |
| 14 | 1.92        | 794       |
| 15 | 2.32        | 868       |
| 16 | 2.06        | 806       |
| 17 | 1.80        | 832       |
| 18 | 1.94        | 755       |
| 19 | 2.07        | 848       |
| 20 | 2.06        | 791       |

表 B.1 原始数据 (续)

| 序号 | 线速<br>m/min | 火焰温度<br>℃ |
|----|-------------|-----------|
| 21 | 1.86        | 814       |
| 22 | 2.05        | 743       |
| 23 | 2.06        | 831       |
| 24 | 1.81        | 791       |
| 25 | 1.95        | 791       |
| 26 | 2.07        | 796       |
| 27 | 2.03        | 791       |
| 28 | 2.10        | 688       |
| 29 | 2.00        | 802       |
| 30 | 2.09        | 856       |
| 31 | 1.87        | 727       |
| 32 | 2.02        | 807       |
| 33 | 2.13        | 780       |
| 34 | 2.14        | 843       |
| 35 | 1.96        | 808       |
| 36 | 2.08        | 797       |
| 37 | 1.95        | 780       |
| 38 | 2.29        | 824       |
| 39 | 2.02        | 788       |
| 40 | 2.03        | 814       |
| 41 | 2.38        | 834       |
| 42 | 2.11        | 814       |
| 43 | 2.03        | 815       |
| 44 | 1.90        | 813       |
| 45 | 2.15        | 812       |
| 46 | 2.14        | 777       |
| 47 | 1.82        | 766       |
| 48 | 2.03        | 796       |
| 49 | 1.97        | 810       |
| 50 | 1.99        | 777       |

表 B.1 原始数据 (续)

| 序号 | 线速<br>m/min | 火焰温度<br>℃ |
|----|-------------|-----------|
| 51 | 2.18        | 796       |
| 52 | 2.07        | 738       |
| 53 | 1.97        | 785       |
| 54 | 1.91        | 762       |
| 55 | 1.96        | 790       |
| 56 | 2.08        | 759       |
| 57 | 2.08        | 809       |
| 58 | 1.91        | 878       |
| 59 | 1.96        | 808       |
| 60 | 1.87        | 827       |
| 61 | 2.05        | 793       |
| 62 | 1.93        | 788       |
| 63 | 1.95        | 789       |
| 64 | 2.10        | 808       |
| 65 | 2.09        | 828       |
| 66 | 2.06        | 777       |
| 67 | 2.07        | 841       |
| 68 | 2.14        | 812       |
| 69 | 1.85        | 794       |
| 70 | 1.89        | 821       |
| 71 | 1.99        | 801       |
| 72 | 2.09        | 765       |
| 73 | 1.97        | 795       |
| 74 | 2.01        | 796       |
| 75 | 2.04        | 804       |
| 76 | 1.97        | 814       |
| 77 | 2.09        | 780       |
| 78 | 1.96        | 766       |
| 79 | 2.04        | 826       |
| 80 | 1.96        | 795       |

表 B.1 原始数据 (续)

| 序号  | 线速<br>m/min | 火焰温度<br>℃ |
|-----|-------------|-----------|
| 81  | 1.90        | 799       |
| 82  | 1.97        | 805       |
| 83  | 1.87        | 825       |
| 84  | 2.08        | 798       |
| 85  | 2.14        | 840       |
| 86  | 1.88        | 765       |
| 87  | 1.89        | 716       |
| 88  | 1.98        | 755       |
| 89  | 1.97        | 799       |
| 90  | 1.90        | 787       |
| 91  | 2.07        | 803       |
| 92  | 2.01        | 750       |
| 93  | 2.03        | 818       |
| 94  | 1.98        | 788       |
| 95  | 2.08        | 822       |
| 96  | 2.07        | 823       |
| 97  | 1.99        | 798       |
| 98  | 1.98        | 846       |
| 99  | 2.13        | 829       |
| 100 | 1.97        | 754       |
| 101 | 1.93        | 823       |
| 102 | 2.07        | 747       |
| 103 | 2.03        | 788       |
| 104 | 2.03        | 823       |
| 105 | 2.06        | 784       |
| 106 | 2.03        | 874       |
| 107 | 1.73        | 728       |
| 108 | 1.92        | 792       |
| 109 | 2.08        | 810       |
| 110 | 1.98        | 819       |

表 B.1 原始数据 (续)

| 序号  | 线速<br>m/min | 火焰温度<br>℃ |
|-----|-------------|-----------|
| 111 | 2.02        | 757       |
| 112 | 2.04        | 778       |
| 113 | 2.11        | 814       |
| 114 | 2.02        | 796       |
| 115 | 2.02        | 834       |
| 116 | 1.80        | 807       |
| 117 | 1.97        | 747       |
| 118 | 2.08        | 782       |
| 119 | 1.97        | 825       |
| 120 | 2.04        | 817       |
| 121 | 2.20        | 796       |
| 122 | 1.95        | 713       |
| 123 | 1.89        | 791       |
| 124 | 2.00        | 784       |
| 125 | 1.96        | 754       |

表 B.2 相关系数矩阵

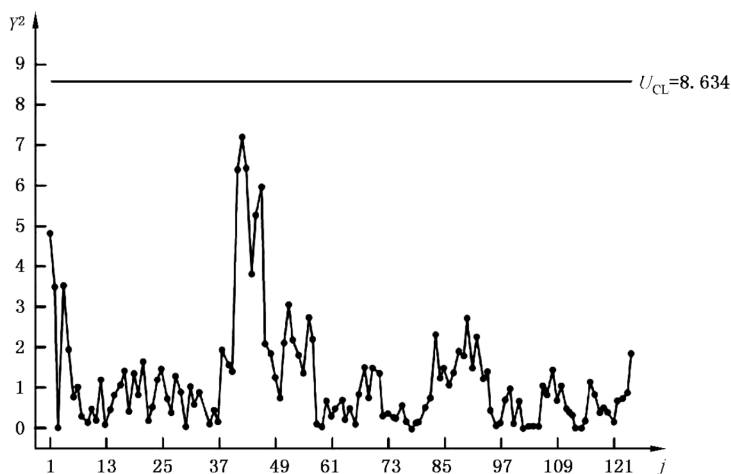
| 特性   | 线速<br>m/min | 火焰温度<br>℃ |
|------|-------------|-----------|
| 线速   | 1           |           |
| 火焰温度 | 0.188       | 1         |

**B.3 选择 MEWMA 控制图参数**

本实例用到两个特性,  $d=2$ 。预先给定处于统计控制状态的 ARL 为 200。选择 MEWMA 控制图作为阶段 II 的控制程序, 来监测过程的小幅偏移。MEWMA 控制图的平滑参数  $\lambda$  和上控制限  $h$  宜通过模拟仿真来确定。实际工作中, 这些参数可直接由软件提供。

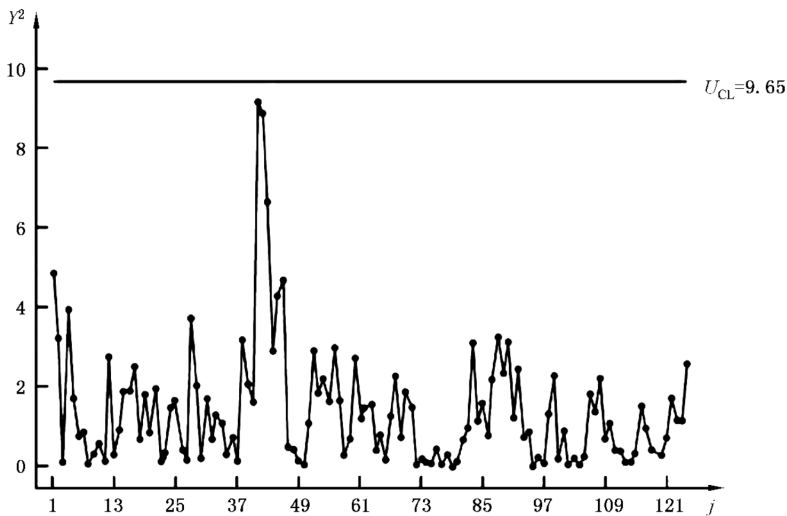
**B.4 MEWMA 控制图**

利用统计软件可绘制 MEWMA 控制图, 对应于  $\lambda$  的取值: 0.1、0.2、0.3 及相应的上控制限  $h$ , 得到图 B.1、图 B.2 和图 B.3。对比研究上述图可见, 当  $\lambda=0.3$  时, 第 41 点 (10, 21) 落在上控制限  $U_{CL}=10.08$  的上方, 发出过程处于失控状态的警报。进一步分析表明, 线速是导致过程在第 41 点失控的关键原因。



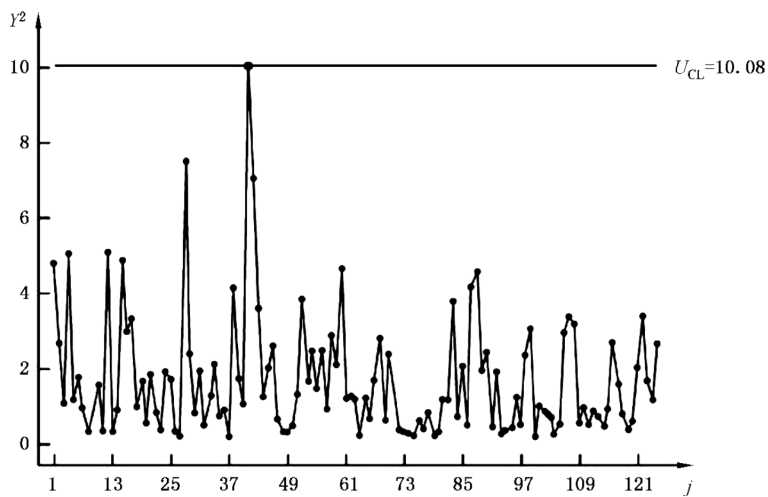
标引序号说明：  
 $j$  —— 观测序号；  
 $Y^2$  ——  $Y^2$  统计量。

图 B.1  $\lambda = 0.1$  时线速和火焰温度的 MEWMA 控制图



标引序号说明：  
 $j$  —— 观测序号；  
 $Y^2$  ——  $Y^2$  统计量。

图 B.2  $\lambda = 0.2$  时线速和火焰温度的 MEWMA 控制图



标引序号说明：  
 $j$  —— 观测序号；  
 $Y^2$  ——  $Y^2$  统计量。

图 B.3  $\lambda = 0.3$  时线速和火焰温度的 MEWMA 控制图

## 附录 C

(资料性)

 $\mu$  和  $\Sigma$  的估计C.1 估计  $\mu$  和  $\Sigma$  ( $n > 1$ )

实际工作中,经常需要利用过程处于统计控制状态的、子组大小为  $n$  的预备子组来估计  $\mu$  和  $\Sigma$ 。本附录中, $x_{ijk}$ 是指第  $i$  个质量特性的第  $j$  个子组的第  $k$  个观测值, $k=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m,i=1,2,\cdots,d$ ,且  $n > d$ 。

假设已经得到  $m$  个这样的子组,子组均值和方差可计算得到:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ijk} \quad \cdots \cdots \cdots (C.1)$$

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij})^2 \quad \cdots \cdots \cdots (C.2)$$

第  $j$  个子组的第  $a$  个质量特性与第  $b$  个质量特性之间的协方差为:

$$s_{abj} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{ajk} - \bar{x}_{aj})(x_{bjk} - \bar{x}_{bj}), a \neq b \quad \cdots \cdots \cdots (C.3)$$

随后, $\bar{x}_{ij}$ ,  $s_{ij}^2$  和  $s_{abj}$  针对所有的  $m$  个子组,求平均得到:

$$\bar{\bar{x}}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \bar{x}_{ij} \quad \cdots \cdots \cdots (C.4)$$

$$\bar{s}_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_{ij}^2 \quad \cdots \cdots \cdots (C.5)$$

$$\bar{s}_{ab} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m s_{abj}, a \neq b \quad \cdots \cdots \cdots (C.6)$$

$\{\bar{\bar{x}}_i\}$  是样本均值向量  $\bar{\mathbf{x}}$  的第  $i$  个元素。子组协方差矩阵求平均,得到  $d \times d$  的样本协方差矩阵  $\bar{\mathbf{S}}$ ,其构成为:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{s}_1^2 & \bar{s}_{12} & \cdots & \bar{s}_{1d} \\ & \bar{s}_2^2 & \cdots & \bar{s}_{2d} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \bar{s}_d^2 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \cdots (C.7)$$

当过程处于统计控制状态时,样本均值向量  $\bar{\mathbf{x}}$  和样本协方差矩阵  $\bar{\mathbf{S}}$  ( $n > 1$ ) 是对  $\mu$  和  $\Sigma$  的无偏估计。

C.2 估计  $\mu$  和  $\Sigma$  ( $n = 1$ )

假设得到服从多元正态分布的随机样本: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ ,其中:第  $j$  个观测向量  $\mathbf{x}_j$  包含了  $d$  个特性的观测值  $x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{dj}$ 。样本均值向量为:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{x}_j \quad \cdots \cdots \cdots (C.8)$$

样本协方差矩阵为:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{j=1}^{m-1} (\mathbf{x}_{j+1} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_{j+1} - \bar{\mathbf{x}})^T \quad \cdots \cdots \cdots (C.9)$$

样本协方差矩阵  $\mathbf{S}$  的主对角线元素是样本方差,

$$s_i^2 = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{j=1}^{m-1} (x_{ij+1} - x_{ij})^2 \dots\dots\dots (C.10)$$

样本协方差为：

$$s_{ab} = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{j=1}^{m-1} (x_{aj+1} - x_{aj})(x_{bj+1} - x_{bj}), a \neq b \dots\dots\dots (C.11)$$

当过程处于统计控制状态时,样本均值向量  $\bar{\mathbf{x}}$  和样本协方差矩阵  $\mathbf{S}(n=1)$  是  $\boldsymbol{\mu}$  和  $\boldsymbol{\Sigma}$  的无偏估计。

## 参 考 文 献

- [1] GB/T 17989.2 控制图 第2部分:常规控制图
  - [2] GB/T 17989.6 生产过程质量控制统计方法 控制图 第6部分:指数加权移动平均控制图
  - [3] GB/T 40681.6 生产过程能力和性能监测统计方法 第6部分:多元正态过程能力分析
  - [4] HOTELLING H.,(1947). Multivariate quality control illustrated by the air testing of sample bombsights, in Techniques of Statistical Analysis. McGraw Hill, New York, p. 111-184
  - [5] LOWRY C.A., WOODALL W.H., RIGDON S.E.(1992). A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. Technometrics, 34(1),46-53
  - [6] MONTGOMERY D.C.,(2013). Introduction to Statistical Quality Control. 7<sup>th</sup> ed. Wiley, New York
  - [7] PRABHU Sharad S., RUNGER George C.(1997). Designing a Multivariate EWMA Control Chart. Journal of Quality Technology, 29(1),8-15
  - [8] WOODALL J.H., SULLVAN W. H., (1996). A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations. Journal of Quality Technology, 28(4), 398-408
-