



中华人民共和国国家标准

GB/T 17989.6—2022

生产过程质量控制统计方法 控制图 第6部分：指数加权移动平均控制图

Statistical method of quality control in production process—
Control charts—Part 6: EWMA control charts

(ISO 7870-6:2016, Control charts—Part 6: EWMA control charts, MOD)

2022-03-09 发布

2022-10-01 实施

国家市场监督管理总局
国家标准化管理委员会 发布

目 次

前言 I

引言 III

1 范围 1

2 规范性引用文件 1

3 术语和定义、符号、缩略语 1

 3.1 术语和定义 1

 3.2 符号 1

 3.3 缩略语 2

4 计量数据的 EWMA 2

 4.1 概述 2

 4.2 对加权平均的理解 3

 4.3 EWMA 控制图的控制限 3

 4.4 EWMA 控制图的构建 4

 4.5 示例 6

5 控制图的选用 8

 5.1 常规控制图与 EWMA 控制图 8

 5.2 平均链长 9

 5.3 EWMA 控制图参数的选取 10

6 实施 EWMA 控制图的程序 11

7 EWMA 控制图对非正态数据的敏感性 12

8 优点与局限 12

 8.1 优点 12

 8.2 局限 12

附录 A (资料性) EWMA 控制图的应用 13

附录 B (规范性) 用于监控不合格品率的 EWMA 控制图 16

附录 C (规范性) 用于监控不合格数的 EWMA 控制图 18

附录 D (资料性) 控制图的有效性 20

参考文献 24

前 言

本文件按照 GB/T 1.1—2020《标准化工作导则 第1部分：标准化文件的结构和起草规则》的规定起草。

本文件是 GB/T 17989 的第6部分。GB/T 17989 已经发布了以下部分：

- 控制图 第1部分：通用指南；
- 控制图 第2部分：常规控制图；
- 控制图 第3部分：验收控制图；
- 控制图 第4部分：累积和控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第5部分：特殊控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第6部分：指数加权移动平均控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第7部分：多元控制图；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第8部分：短周期小批量的控制方法；
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第9部分：平稳过程控制图。

本文件修改采用 ISO 7870-6:2016《控制图 第6部分：指数加权移动平均控制图》。

本文件与 ISO 7870-6:2016 相比做了下述结构调整：

- 将第1章中“下列情况推荐使用常规控制图……”整段放入注1中，更符合叙述逻辑；
- 将第3章“符号和缩略语”改为“术语、符号和缩略语”，增加了3.1术语和定义，给出使用术语的说明，“符号和缩略语”分为“3.2符号”和“3.3缩略语”。

本文件与 ISO 7870-6:2016 的技术差异及其原因如下：

- 将本文件中的符号“ N ”修改为“ n ”，其解释“样本中的个体数(样本量)”修改为“子组大小”，与本系列标准其他部分保持一致；
- 将第3章中符号“ σ_0 ”的解释中“ $P = p_0$ 的二项分布标准差的真值”修改为“概率为 p_0 的二项分布标准差的真值”，解释更加清晰；
- 将第4章中4.1的“当 $\lambda = 1$ 时，EWMA控制图即为均值控制图”修改为“当 $\lambda = 1$ 时，EWMA控制图即为单值 $\bar{X}$ 控制图”，修改原文错误。

本文件做了下列编辑性改动：

- 将标准名称改为《生产过程质量控制统计方法 控制图 第6部分：指数加权移动平均控制图》；
- 将3.2.2中“中心线”的英文改为“center line”；
- 将第4章中4.3的公式(8)“ $U_{CL} = \mu_0 - L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$ ”修改为“ $U_{CL} = \mu_0 + L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}}$ ”；
- 将第4章中4.4表1的表头“EWMA值”修改为“EWMA z_i ”；
- 将第4章中4.5的“第28点”修改为“第29点和第30点”；
- 将第5章中5.2的“需要14.5个样本”修改为“需要14.9个样本”；
- 将第5章中5.2的“EWMA控制图采用 $\pm 3\sigma\sqrt{n}$ ”修改为“EWMA控制图采用 $\pm 3\sigma/\sqrt{n}$ 控制限”；
- 删除了第5章中5.3.2的注；

- 将第5章中公式(21)“ $\delta_1 = \min\left\{\frac{U_{1/4} - \mu_0}{\sigma_0}, \frac{\mu_0 - L_{1/4}}{\sigma_0}\right\}$ ”修改为 $\delta_1 = \min\left\{\frac{U_{\mu} - \mu_0}{\sigma_0}, \frac{\mu_0 - L_{\mu}}{\sigma_0}\right\}$ ；

——将第 5 章中 5.3.4 的“ $\delta\sqrt{n}=2$ ”修改为“ $\delta_1\sqrt{n}=2$ ”；

——将附录 A 的公式(A.2)“ $L_\mu = T_L - 3\sigma_0 = 99.5 + 3 \times 0.1 = 99.8$ ”修改为“ $L_\mu = T_L + 3\sigma_0 = 99.5 + 3 \times 0.1 = 99.8$ ”；

——将附录 C 中 C.2 的“使用表 3”修改为“使用表 4”。

请注意本文件的某些内容可能涉及专利。本文件的发布机构不承担识别专利的责任。

本文件由全国统计方法应用标准化技术委员会(SAC/TC 21)提出并归口。

本文件起草单位：清华大学、北京航空航天大学、中国标准化研究院、山东省标准化研究院、北京工业大学、中通客车股份有限公司。

本文件主要起草人：孙静、彭思程、杨军、丁文兴、魏洁、孙良泉、谢田法、李梦馨、吴广宇。

引 言

控制图是过程控制中常用的统计工具,用来监测过程中的偏移,保持过程稳定。GB/T 17989 控制图系列标准分为以下 9 部分:

- 控制图 第 1 部分:通用指南。目的在于给出控制图基本术语、原理及分类,以及选择控制图的指南。
- 控制图 第 2 部分:常规控制图。目的在于确立使用常规控制图进行过程控制的指南。
- 控制图 第 3 部分:验收控制图。目的在于确立验收控制图进行过程控制的使用指南,并规定了确定子组样本量、行动限、和决策准则的一般程序。
- 控制图 第 4 部分:累积和控制图。目的在于确立应用累积和技术进行过程检测、控制和回顾性分析的统计方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 5 部分:特殊控制图。目的在于确立理解和应用特殊控制图进行统计过程控制的指南。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 6 部分:指数加权移动平均控制图。目的在于确立理解和应用指数加权移动平均(EWMA)控制图进行统计过程控制的指南。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 7 部分:多元控制图。目的在于确立构建和应用多元控制图进行统计过程控制的指南,并建立了使用和理解计量数据多元控制图的常规方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 8 部分:短周期小批量的控制方法。目的在于确立子组大小为 1 时,应用常规计量控制图检测短周期和小批量生产过程的方法。
- 生产过程质量控制统计方法 控制图 第 9 部分:平稳过程控制图。目的在于确立构建和应用控制图对平稳过程进行控制的指南。

常规控制图是过程控制中应用最广泛的统计控制方法,但它对于监测过程的小幅偏移较为迟缓。指数加权移动平均控制图则能够及时迅速地监测过程的小幅和中幅偏移。

常规控制图易于使用,能够迅速监测到过程的大幅偏移,然而它并不能高效地监测过程的小幅、中幅偏移。很多情况下,过程的变化是缓慢、逐渐发生的(尤其是连续生产的情况)。为了防止过程严重偏离目标值,需要提早监测到这种变化。有两种方法可以提高常规控制图监测小幅和中幅偏移的有效性。

- 最简便的方法是增大抽取的子组大小,但往往不够经济。当生产率较低、耗费时间过长或检测成本过高时,抽取子组大小大于 1 的子组是不可行的,这一方法无法使用。
- 为了发现生产过程中的异常波动,可以在过程控制中将此前的检测结果考虑在内。常规控制图仅对样本观测值独立地予以考虑,忽视了观测结果整个序列所包含的信息,导致常规控制图对监测过程小幅偏移不灵敏。引入之前观测结果的方法可以提高监测小幅偏移的有效性。

当需要监测过程缓慢、渐进的偏移时,能够考虑以往数据的特殊控制图往往是更好的选择。下面是这种情况下,比常规控制图更有效的控制方法:

- a) 累积和控制图(CUSUM 控制图):GB/T 17989.4 对此有详细说明。相比于 $\bar{X}$ 控制图,累积和控制图对过程均值在 0.5~2 倍标准差的偏移更灵敏。累积和控制图对逐个样本均值和设定目标之间的偏差进行累加。即使过程均值只出现了持续的小幅偏移,都会形成可观的偏差累积和。因此,累积和控制图更适用于 $\bar{X}$ 控制图难以发现的过程持续小幅偏移。
- b) 指数加权移动平均控制图(EWMA 控制图):本文件将对此进行介绍。指数加权移动平均控制图在形式上与常规控制图相似。二者的区别在于:常规控制图的监测对象是逐个样本均值,而指数加权移动平均控制图的监测对象是当前样本均值与之前样本均值的加权平均。

EWMA 控制图通常用于监测过程均值的小幅偏移。相比于常规控制图,EWMA 控制图能够更灵敏地发现 0.5~2 倍标准差范围内的偏移,但无法及时发现均值的大幅偏移。当子组大小为 1 时,建议使用 EWMA 控制图。

为了确保及时发现过程小幅和大幅偏移,建议选取 λ 值较小的 EWMA 控制图和常规控制图同时使用。EWMA 控制图只能监测过程均值,如果需要监测过程的离散趋势,需要使用其他方法。

生产过程质量控制统计方法 控制图

第 6 部分：指数加权移动平均控制图

1 范围

本文件给出了理解和应用指数加权移动平均(EWMA)控制图进行统计过程控制的指南。EWMA 控制图是一种用于监测过程均值的小幅波动的统计过程控制技术,它能够及时发现过程均值的小幅和中幅波动。EWMA 控制图以对全部历史数据的样本均值进行指数加权移动平均的方式,对过程均值进行评价。EWMA 按与当前位置由近及远、以几何递减的方式对样本进行加权,离当前越近的样本权重越大影响越大,而越远的样本权重越小影响越小,具体的权重大小取决于平滑参数(λ)。

本文件适用于使用控制图监测过程均值的小幅波动的情形。

注 1: EWMA 图的主要目标与常规控制图相同。常规控制图的相关内容在 GB/T 17989.2 中已有说明。下列情况宜使用常规控制图:

- 生产率较低;
- 抽样和检测的过程复杂且耗时较长;
- 检测成本过高;
- 存在安全隐患。

注 2: 质量工作者能使用生产线中获得的一组单个观测值来制作单值控制图,而无须使用多个观测值构成的样本制作均值控制图。当检测多个观测值构成的样本的成本过高、难于实现时,这一选择是必要的。例如:客户投诉或产品退换的数量往往按月统计,质量管理者需要使用它们制作成图以反映质量问题。这类控制图同样适用于自动检测设备监测每一件产品的情况,质量管理者使用这类控制图来监测产品质量的小幅波动(例如:由于设备磨损,造成产品质量的逐渐下滑)。

2 规范性引用文件

下列文件中的内容通过文中的规范性引用而构成本文件必不可少的条款。其中,注日期的引用文件,仅该日期对应的版本适用于本文件;不注日期的引用文件,其最新版本(包括所有的修改单)适用于本文件。

GB/T 17989.1 控制图 第 1 部分:通用指南(GB/T 17989.1—2020,ISO 7870-1:2014,MOD)

3 术语和定义、符号、缩略语

3.1 术语和定义

GB/T 17989.1 界定的术语和定义适用于本文件。

3.2 符号

下列符号适用于本文件。

- ARL₀ 受控状态的平均链长
- ARL₁ 给定偏移程度的平均链长
- c 平均不合格数

c_0	平均不合格数的目标值
c_1	平均不合格数的拒绝限
c_i	第 i 个样本的不合格数
L_{CL}	EWMA 控制图的下控制限(如果为负值,则取作 0)
L_z	用以构建 z_i 控制限的系数(以统计量 z_i 的标准差的倍数表示)
L_μ	均值的下拒绝限
n	子组大小
p	过程的不合格品率
p_0	过程不合格品率的目标值
p_1	过程不合格品率的上拒绝限
p_i	第 i 个样本的不合格品率
s	标准差 σ 的估计值
U_{CL}	EWMA 控制图的上控制限
U_μ	均值的上拒绝限
$\bar{x}_i$	第 i 个子组的子组均值
z_i	EWMA 控制图中用于打点的 EWMA 统计量的值
z_0	z_i 的初值
δ	均值的偏移(以标准差的倍数表示)
δ_1	均值可接受的最大偏移(以标准差的倍数表示)
λ	平滑参数
μ_0	过程均值的目标值
$\sigma_{x_i z_i z_0 \sigma}$	随机变量 X 的标准差的真值
σ_0	概率为 p_0 的二项分布标准差的真值
$\sigma_{\bar{x}}$	n 个观测值的均值的标准差; $\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$
σ_z	当 i 趋于无穷时 z_i 的标准差

$$\delta \delta_1 ARL_0 ARL_1$$

3.3 缩略语

下列缩略语适用于本文件。

ARL 平均链长(Average Run Length)

CL 中心线(Centre line)

MAXRL 最大链长(以整数表示的链长随机变量的 95%分位数)(Maximum Run Length)

4 计量数据的 EWMA

4.1 概述

EWMA 控制图对过去和当前数据进行指数加权移动平均,而且权重从当前数据到过往数据按照指数递减。故而越是近期的数据对 EWMA 值的影响越明显。指数加权移动平均(EWMA)的定义见公式(1):

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda) z_{i-1} \dots\dots\dots (1)$$

注 1: 若将 EWMA 控制图用于控制子组样本数 $n > 1$ 的子组,只需将 x_i 替换为 $\bar{x}_i$ 。

$0 < \lambda < 1$, 且 λ 为常数。 z_i 的初始值(第一个样本编号 $i = 1$)往往为过程的目标值,即 $z_0 = \mu_0$ 。

注 2：用预备数据的均值估计 μ_0 。
当 $\lambda=1$ 时，EWMA 控制图即为单值 $\bar{X}$ 控制图。

4.2 对加权平均的理解

为了论证 EWMA 是所有以往数据的加权平均，替换公式(1)右侧的 z_{i-1} ，得到公式(2)：

$$\begin{aligned} z_i &= \lambda x_i + (1-\lambda) [\lambda x_{i-1} + (1-\lambda) z_{i-2}] \\ &= \lambda x_i + \lambda(1-\lambda)x_{i-1} + (1-\lambda)^2 z_{i-2} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

继续递归替换 z_{i-j} ($j=2,3,\dots$)，可得公式(3)：

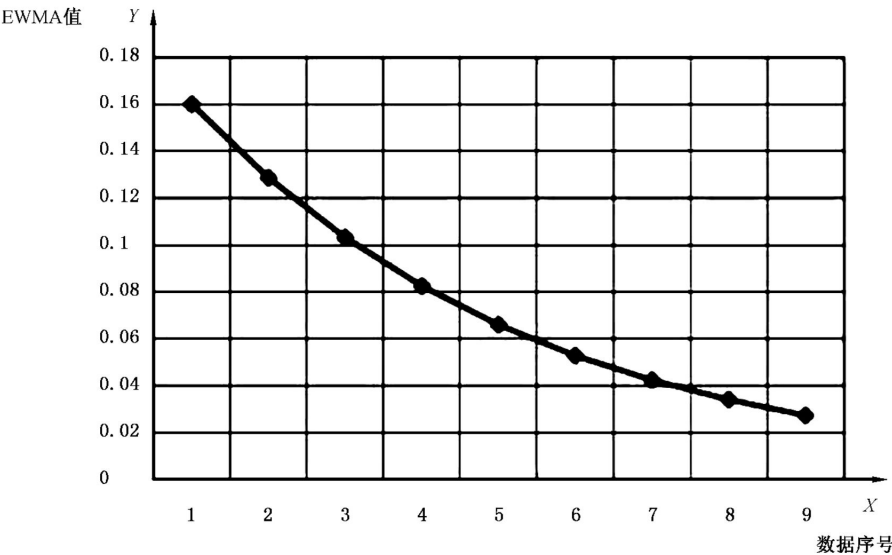
$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j x_{i-j} + (1-\lambda)^i z_0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

当 $i=1$ ， $z_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)\mu_0$ 。

权重 $\lambda(1-\lambda)^j$ 随着数据序号 $i-j$ 中 j 的增大呈几何级数递减，即离当前数据 i 越近(j 越小)的数据权重越大，离当前数据 i 越远(j 越大)的数据权重越小。且权重之和趋于 1，证明如式(4)：

$$\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j = \lambda \left[\frac{1 - (1-\lambda)^i}{1 - (1-\lambda)} \right] = 1 - (1-\lambda)^i \quad \dots\dots\dots(4)$$

若 $\lambda=0.2$ ，则当前数据的权重为 0.2，以往数据的权重为 0.16、0.128、0.102 4，依此类推，这些权重如图 1 所示。因为权重呈几何级数式递减，故 EWMA 又被称为几何移动平均(GMA)。



标引序号说明：
X —— 与当前数据的距离 j (EWMA $\lambda=0.2$)；
Y —— 权重 $\lambda(1-\lambda)^j$ 。

图 1 历史数据的权重

EWMA 值可被视作所有以往观测和当前观测的加权平均值，对正态假设并不敏感。因此，它是一种较理想的适用于单个观测数据的控制图。

4.3 EWMA 控制图的控制限

若观测值 x_i 彼此独立，方差为 σ^2 ，则 z_i 的方差见公式(5)：

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad \dots\dots\dots(5)$$

EWMA 控制图以序号 i (或时间)为横轴， z_i 为纵轴，其控制限的计算见公式(6)和公式(7)：

中心线= μ_0

$$U_{CL} = \mu_0 + L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \dots\dots\dots (6)$$

$$L_{CL} = \mu_0 - L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} [1 - (1-\lambda)^{2i}] \dots\dots\dots (7)$$

系数 L_z 用来确定控制限的宽度,它的值取决于置信水平。 $\bar{X}-R$ 控制图的置信水平取 99.73%(±3σ),因而设定了 3σ 控制限。与之类似,EWMA 控制图的置信水平可根据需要进行调整(例如: $L_z=2.7$ 对应的置信水平为 99.307%)。

只要 z_i 落在控制限内时,就不需要进行调整。一旦 z_i 落在控制限外,则认为过程处于失控状态。此时,需要对过程进行调整,调整后重新绘制 EWMA 控制图。EWMA 控制图初始化时,不考虑调整前的观测数据。取 z_0 为初始值。

随着 i 增加, $[1 - (1-\lambda)^{2i}]$ 趋近于 1。也就是说,EWMA 控制图使用一段时间后,控制限将趋近于稳定值,如公式(8)和公式(9)所示:

中心线= μ_0

$$U_{CL} = \mu_0 + L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \dots\dots\dots (8)$$

$$L_{CL} = \mu_0 - L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \dots\dots\dots (9)$$

尽管如此,强烈推荐使用准确的控制限。这样在 EWMA 控制图初始化后,能够使监测过程异常的及时性显著提升。

注:在实际工作中,使用样本数据的标准差 s 作为 σ 的估计。

4.4 EWMA 控制图的构建

为了展示 EWMA 控制图的建立过程,先利用历史数据计算下列参数:

$\mu_0=50$

$s=2.053\ 9$

设定 $\lambda=0.3$,同公或(10)可得

$$\sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} = \sqrt{\frac{0.3}{1.7}} = 0.420\ 1 \dots\dots\dots (10)$$

控制限的稳定值可通过公式(11)和公式(12)得出:

$$U_{CL} = 50 + 3 \times 0.420\ 1 \times 2.053\ 9 = 52.588\ 5 \dots\dots\dots (11)$$

$$L_{CL} = 50 - 3 \times 0.420\ 1 \times 2.053\ 9 = 47.411\ 5 \dots\dots\dots (12)$$

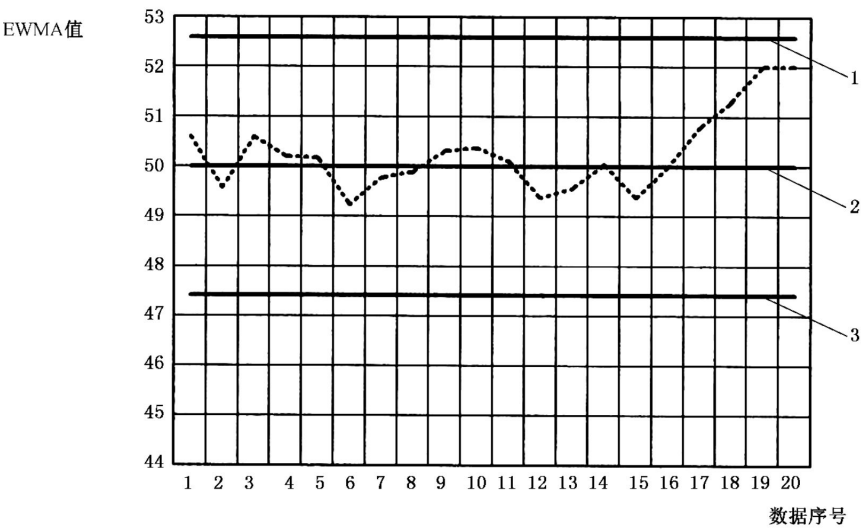
20 个观测数据及 EWMA 值的计算结果由表 1 给出。

表 1 EWMA 值的计算

序号	x_i	EWMA z_i
1	52.0	50.600 0
2	47.0	49.520 0
3	53.0	50.564 0

表 1 EWMA 值的计算 (续)

序号	x_i	EWMA z_i
4	49.3	50.184 8
5	50.1	50.159 4
6	47.0	49.211 6
7	51.0	49.748 1
8	50.1	49.853 7
9	51.2	50.257 6
10	50.5	50.330 3
11	49.6	50.111 2
12	47.6	49.357 8
13	49.9	49.520 5
14	51.3	50.054 3
15	47.8	49.378 0
16	51.2	49.924 6
17	52.6	50.727 2
18	52.4	51.229 1
19	53.6	51.940 3
20	52.1	51.988 2



标引序号说明：
1—— $U_{CL} = 52.588\ 5$ ；
2—— $CL = 50$ ；
3—— $L_{CL} = 47.411\ 5$ 。

图 2 EWMA 图

在图 2 所示的 EWMA 控制图中,所有的 EWMA 数值对应的点子均落在控制限内,表明该过程处于受控状态。

4.5 示例

本示例使用表 2 给出的观测数据(x_i)。前 20 个观测值由均值 $\mu=10$ 、标准差 $\sigma=1$ 的正态分布随机生成,后 10 个观测值由均值 $\mu=11$ 、标准差 $\sigma=1$ 的正态分布随机生成,换言之,过程均值出现了一个标准差的偏移。

设定 $\lambda=0.10$, $L_z=2.7$ 对表 2 中的数据建立 EWMA 控制图。

过程均值的目标值 $\mu=10$,标准差 $\sigma=1$ 。

下面以第一个观测值 $x_1=9.45$ 为例,来说明计算过程。

对应的 EWMA 统计量的第一个值可由公式(13)得出:

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 + (1 - \lambda) z_0 = 0.1 \times 9.45 + 0.9 \times 10 \\ &= 9.945 \ 00 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

如图 3 所示, $z_1=9.945 \ 00$ 为 EWMA 控制图中第一个点。

EWMA 的第二个值由公式(14)得出:

$$\begin{aligned} z_2 &= \lambda x_2 + (1 - \lambda) z_1 = 0.1 \times 7.99 + 0.9 \times 9.945 \\ &= 9.749 \ 50 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

以此类推,可计算出 EWMA 统计量的其他值。

控制限由公式(15)和公式(16)得出:

对 $i=1$,

$$\begin{aligned} U_{CL} &= \mu_0 + L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \\ &= 10 + 2.7 \times 1 \times \sqrt{\frac{0.1}{(2 - 0.1)} [1 - (1 - 0.1)^{2 \times 1}]} \quad \dots\dots\dots (15) \\ &= 10.270 \ 00 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} L_{CL} &= \mu_0 - L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \\ &= 10 - 2.7 \times 1 \times \sqrt{\frac{0.1}{(2 - 0.1)} [1 - (1 - 0.1)^{2 \times 1}]} \quad \dots\dots\dots (16) \\ &= 9.730 \ 00 \end{aligned}$$

对 $i=2$,控制限由公式(17)和公式(18)得出:

$$\begin{aligned} U_{CL} &= \mu_0 + L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \\ &= 10 + 2.7 \times 1 \times \sqrt{\frac{0.1}{(2 - 0.1)} [1 - (1 - 0.1)^{2 \times 2}]} \quad \dots\dots\dots (17) \\ &= 10.363 \ 25 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} L_{CL} &= \mu_0 - L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]} \\ &= 10 - 2.7 \times 1 \times \sqrt{\frac{0.1}{(2 - 0.1)} [1 - (1 - 0.1)^{2 \times 2}]} \quad \dots\dots\dots (18) \\ &= 9.636 \ 75 \end{aligned}$$

表 2 给出了 EWMA 控制图控制限的相关计算结果,EWMA 控制图如图 3 所示。

表 2 EWMA 控制图的相关计算结果

序号	x_i	EWMA $\bar{z}_i$	U_{CL}	L_{CL}
1	9.45	9.945 00	10.270 00	9.730 00
2	7.99	9.749 50	10.363 25	9.636 75
3	9.29	9.703 55	10.424 00	9.576 00
4	11.66	9.899 20	10.467 46	9.532 54
5	12.16	10.125 28	10.499 90	9.500 10
6	10.18	10.130 75	10.524 71	9.475 29
7	8.04	9.921 67	10.543 98	9.456 02
8	11.46	10.075 51	10.559 09	9.440 90
9	9.20	9.987 96	10.571 05	9.428 95
10	10.34	10.023 16	10.580 55	9.419 45
11	9.03	9.923 84	10.588 13	9.411 87
12	11.47	10.078 46	10.594 20	9.405 80
13	10.51	10.121 61	10.599 08	9.400 92
14	9.40	10.049 45	10.603 00	9.397 00
15	10.08	10.052 51	10.606 15	9.393 85
16	9.37	9.984 26	10.608 70	9.391 30
17	10.62	10.047 83	10.670 75	9.389 25
18	10.31	10.074 05	10.612 41	9.876 00
19	8.52	9.918 64	10.613 74	9.386 26
20	10.84	10.010 78	10.614 83	9.385 17
21	10.90	10.099 70	10.615 70	9.384 30
22	9.33	10.027 73	10.616 41	9.383 59
23	12.29	10.249 46	10.616 98	9.383 02
24	11.50	10.374 51	10.617 45	9.382 55
25	10.60	10.397 06	10.617 82	9.382 18
26	11.08	10.465 35	10.618 13	9.381 87
27	10.38	10.456 82	10.618 37	9.381 63
28	11.62	10.573 14	10.618 57	9.381 43
29	11.31	10.646 82	10.618 73	9.381 26
30	10.52	10.634 14	10.618 87	9.381 13

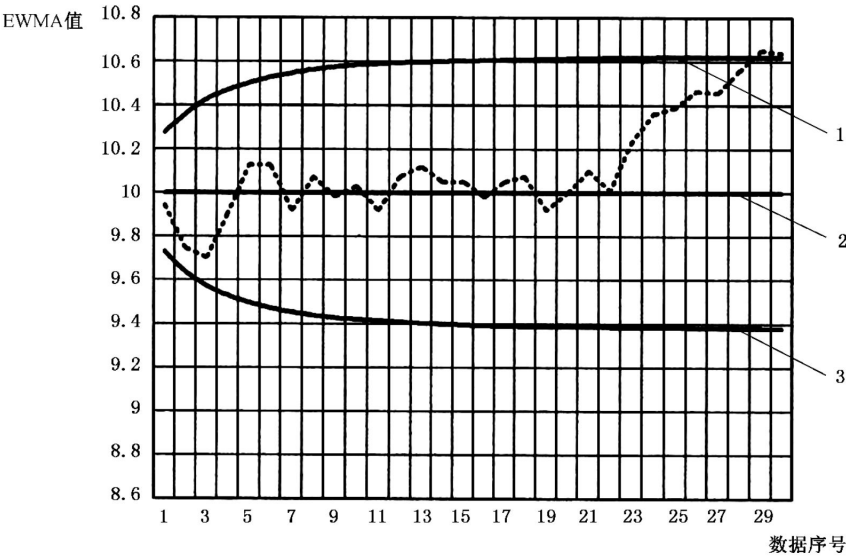
从图 3 中可以看出,上下控制限之间的宽度随着 i 的增加而增宽,最终逐渐接近稳定值而趋于稳

定。稳定值可由公式(19)和公式(20)得出：

$$\begin{aligned}
 U_{CL} &= \mu_0 + L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \\
 &= 10 + 2.7 \times 1 \times \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} \dots\dots\dots (19) \\
 &= 10.619\ 42
 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 L_{CL} &= \mu_0 - L_z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2-\lambda)}} \\
 &= 10 - 2.7 \times 1 \times \sqrt{\frac{0.1}{(2-0.1)}} \dots\dots\dots (20) \\
 &= 9.380\ 58
 \end{aligned}$$



标引序号说明：
 1—— $U_{CL}=10.62$ ；
 2—— $CL=10.00$ ；
 3—— $L_{CL}=9.38$ 。

图 3 EWMA 控制图

EWMA 控制图的第 29 点和第 30 点皆超出上控制限 U_{CL} 而发出警报，说明过程已失控。

5 控制图的选用

5.1 常规控制图与 EWMA 控制图

与常规控制图不同，EWMA 控制图无法基于样本给出检测过程偏移的概率。因为这一概率值不是常数，它受先前样本的影响。针对每个样本都能计算出该概率值，但概率值的变化次数过多，没有实用价值。

因此,用 ARL(检测出偏移所需的平均连续样本数)来衡量 EWMA 控制图的有效性。

如果过程处于受控状态,那么,期望虚发警报的概率很低,即虚发警报前的平均样本数应较大(通常 ARL_0 在 100 到 1 000 之间取值)。

另一方面,如果过程出现了偏移,期望能尽快发现该偏移,即从偏移发生到出现第一个超出控制限的点之间的样本数应尽可能小(ARL_1 较小)。

与常规控制图相比,EWMA 控制图对小幅和中等幅度的偏移更为有效; λ 值越小,有效性越高。而常规控制图对于监测突然、大幅的偏移更有效。

EWMA 控制图的有效性与子组大小有关, n 越大,有效性越高(见附录 D)。

5.2 平均链长

表 3 以 $\delta\sqrt{n}$ 作为偏移程度,给出了控制图的 ARL 和 MAXRL。因此,该表提供了对应于各个偏移程度的常规控制图和 EWMA 控制图的有效性。

例如, $\lambda=0.5, L_z=2.979, n=1$ 的 EWMA 控制图,监测到一个标准差的偏移平均需要 14.9 个样本($\delta\sqrt{n}=1$)。若其他参数不变而 $n=4$,则平均需要 3.2 个样本($\delta\sqrt{n}=2$)。

当偏移 $\delta=0$ (此时过程处于受控状态)、ARL 设定为 370(与常规控制图保持一致)时,EWMA 控制图采用 $\pm 3\sigma/\sqrt{n}$ 控制限,针对不同的 λ 值计算得到 L_z 值,如表 3 的表头所示。由于表中所有控制程序的虚发警报前的平均样本数相同,故而能通过直接比较对应六列中的数据,来对比不同控制程序的有效性。如表 3 所示,较小的 λ 值对监测小幅偏移更有效(例如,当 $\delta\sqrt{n}=1$,ARL 从 14.9 降至 7.6);而监测大幅偏移时 λ 值的影响不显著(例如,当 $\delta\sqrt{n}=3$,ARL 仅从 1.6 降至 1.5)。

根据行业的实际需要,事先设定 ARL 作为质量控制的目标。选取 λ 和 L_z 以满足该设定的 ARL,构建控制图。

表 3 EWMA 与常规控制图的对比

偏移	常规控制图		EWMA 控制图									
	$\lambda=1.0$		$\lambda=0.5$		$\lambda=0.4$		$\lambda=0.3$		$\lambda=0.2$		$\lambda=0.1$	
	$L_z=3.0$		$L_z=2.979$		$L_z=2.961$		$L_z=2.928$		$L_z=2.864$		$L_z=2.715$	
$\delta\sqrt{n}$	ARL	MAXRL	ARL	MAXRL	ARL	MAXRL	ARL	MAXRL	ARL	MAXRL	ARL	MAXRL
0.00	370.4		370.4		370.8		370.9		370		370.9	
0.25	281.2	842	195.7	584	173.8	518	148.5	441	119.6	353	86.3	248
0.50	155.2	464	71.3	211	58.0	170	45.8	132	35.0	97	25.7	66
0.75	81.2	242	29.9	86	24.0	67	19.2	52	15.4	39	12.5	29
1.00	43.9	130	14.9	41	12.3	33	10.3	26	8.8	21	7.6	17
1.25	25.0	74	8.7	23	7.5	18	6.6	15	5.9	13	5.3	11
1.50	15.0	44	5.7	14	5.1	12	4.7	10	4.3	9	3.9	8
1.75	9.5	27	4.1	9	3.8	8	3.6	7	3.4	7	3.1	6
2.00	6.3	18	3.2	7	3.0	6	2.9	6	2.7	5	2.5	5
2.25	4.4	12	2.6	5	2.5	5	2.4	5	2.3	4	2.1	4

表 3 EWMA 与常规控制图的对比 (续)

偏移	常规控制图		EWMA 控制图									
	$\lambda=1.0$ $L_z=3.0$		$\lambda=0.5$ $L_z=2.979$		$\lambda=0.4$ $L_z=2.961$		$\lambda=0.3$ $L_z=2.928$		$\lambda=0.2$ $L_z=2.864$		$\lambda=0.1$ $L_z=2.715$	
2.50	3.2	9	2.2	4	2.1	4	2.0	4	2.0	4	1.8	3
2.75	2.5	6	1.9	4	1.8	3	1.8	3	1.7	3	1.6	3
3.00	2.0	5	1.6	3	1.6	3	1.6	3	1.5	3	1.5	3

5.3 EWMA 控制图参数的选取

5.3.1 λ 的选取

λ 值越小,赋予过去数据的权重则越大,监测小幅偏移的有效性越好;而监测大幅、突发的偏移的有效性则不佳。

λ 值越大,赋予过去数据的权重则越小,EWMA 控制图就能够更及时地监测大幅、突发的偏移;而监测小幅偏移的有效性则不佳。

λ 的选取应基于对过程积累的过往经验。实际应用中, $0.05 \leq \lambda \leq 0.50$:

——当预估会发生缓慢偏移时, λ 宜在 $0.05 \sim 0.25$ 之间取值;

——当预估会发生突发的、中等幅度的偏移时,宜选取接近 0.5 的 λ 值。

最常用的 λ 值为 $0.25 \leq \lambda \leq 0.50$ 。若选取 $\lambda=1$,得到的即是常规控制图。

5.3.2 L_z 的选取

参数 L_z 为子组标准差的倍数,用于计算控制限。为了与其他控制图匹配, L_z 通常设置为 3 ,但当 λ 值较小时, L_z 值也需要适当减小。当 $\lambda \leq 0.1$ 时, L_z 在 $2.6 \sim 2.8$ 之间取值更为适宜。

5.3.3 n 的确定

表 4 给出了特定有效性对应的 EWMA 控制图参数。换言之,给定过程处于受控状态的 ARL_0 和发生幅度为 δ_1 的偏移时的 ARL_1 ,表 4 给出了对应的 L_z 和 λ 值。

可接受的最大偏移幅度 δ_1 的计算如公式(21)所示:

$$\delta_1 = \min \left\{ \frac{U_\mu - \mu_0}{\sigma_0}, \frac{\mu_0 - L_\mu}{\sigma_0} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

具体过程如下:

- 步骤 1:选定两次虚发警报之间的平均样本数(即 ARL_0),通常为 $100 \sim 1\,000$,从而选择表 4 中的某一行;
- 步骤 2:选定监测到可接受最大偏移幅度为 δ_1 所需的平均样本数(即 ARL_1),然后在步骤 1 中所选定的某一行中找到最接近这一 ARL_1 的值,得出对应的 L_z 和 λ 值,同时对应该行得到 $\delta_1 \sqrt{n}$,进而计算出 n ;
- 步骤 3:若由于实际操作限制(成本、可行性等),得出的 n 值过大而无法实现,应重新回到步骤 1 并适当降低要求,调整选定的参数值(ARL_0, ARL_1, δ_1)。

表 4 给定 ARL_0 和 ARL_1 及偏移 δ_1 所对应的 L_z 和 λ 值

$\delta_1\sqrt{n}$	过程处于统计控制状态的 ARL(ARL_0)			
	100	370	500	1 000
0.5	$\lambda=0.07$ $L_z=2.01$ $ARL_1=17.3$	$\lambda=0.06$ $L_z=2.55$ $ARL_1=26.5$	$\lambda=0.05$ $L_z=2.62$ $ARL_1=28.7$	$\lambda=0.04$ $L_z=2.82$ $ARL_1=34.3$
0.75	$\lambda=0.12$ $L_z=2.21$ $ARL_1=10.3$	$\lambda=0.10$ $L_z=2.70$ $ARL_1=14.7$	$\lambda=0.09$ $L_z=2.79$ $ARL_1=15.8$	$\lambda=0.07$ $L_z=2.97$ $ARL_1=18.4$
1.0	$\lambda=0.19$ $L_z=2.35$ $ARL_1=7.0$	$\lambda=0.15$ $L_z=2.80$ $ARL_1=9.6$	$\lambda=0.15$ $L_z=2.91$ $ARL_1=10.2$	$\lambda=0.13$ $L_z=3.11$ $ARL_1=11.7$
1.5	$\lambda=0.33$ $L_z=2.47$ $ARL_1=3.9$	$\lambda=0.26$ $L_z=2.90$ $ARL_1=5.2$	$\lambda=0.24$ $L_z=2.99$ $ARL_1=5.5$	$\lambda=0.22$ $L_z=3.20$ $ARL_1=6.1$
2.0	$\lambda=0.52$ $L_z=2.54$ $ARL_1=2.6$	$\lambda=0.40$ $L_z=2.96$ $ARL_1=3.3$	$\lambda=0.37$ $L_z=3.05$ $ARL_1=3.5$	$\lambda=0.35$ $L_z=3.25$ $ARL_1=3.9$
2.5	$\lambda=0.66$ $L_z=2.56$ $ARL_1=1.89$	$\lambda=0.54$ $L_z=2.98$ $ARL_1=2.38$	$\lambda=0.52$ $L_z=3.07$ $ARL_1=2.50$	$\lambda=0.46$ $L_z=3.27$ $ARL_1=2.76$
3.0	$\lambda=0.81$ $L_z=2.57$ $ARL_1=1.45$	$\lambda=0.70$ $L_z=2.99$ $ARL_1=1.78$	$\lambda=0.70$ $L_z=3.09$ $ARL_1=1.86$	$\lambda=0.66$ $L_z=3.29$ $ARL_1=2.06$
注：若选取的 ARL_1 低于 1.40,使用常规控制图。				

5.3.4 示例

以如下的过程为例：均值的目标值 $\mu_0=100$ ，标准差 $\sigma_0=0.8$ ，选定 $ARL_0=500$ 。监测到幅度为 ± 1 个单位的偏移（即可拒绝的均值上限 $U_\mu=101$ 、下限 $L_\mu=99$ ）的 ARL_1 为 3 或 4。

- 从表 4 中找到 $ARL_0=500$ 所对应的列。
- 在该列中找到最接近 3 的 ARL_1 值。可找到 3.5,对应的 $L_z=3.05$ 、 $\lambda=0.37$ ，相应的 $\delta_1\sqrt{n}=2$ 。
- 计算 $\delta_1=\min(1/0.8;1/0.8)=1.25$ 。由 $\delta_1\sqrt{n}=2$ 可推出 $n=(2/1.25)^2=2.56\cong n=3$ ，向上取整，以提高监测的有效性。

6 实施 EWMA 控制图的程序

EWMA 控制图的实施与其他控制程序相同。EWMA 控制图的程序是基于如下假定：“好的”历史数据已表明过程受控。EWMA 控制图用来检验来自相同生产过程的后续数据是否与历史数据的分布一致。使用 EWMA 控制图之前，需用历史数据估计过程均值的目标值和过程标准差。之后进入控制阶段，计算 EWMA 统计量并检测其是否超出控制限。

计量数据 EWMA 控制图的应用示例见附录 A，用于监控不合格品率 and 不合格数的 EWMA 控制图

按照附录 B 和附录 C 进行构造。

7 EWMA 控制图对非正态数据的敏感性

单值控制图和 EWMA 控制图均可用于子组大小为 1 的情形。但是单值控制图对非正态数据较为敏感,而设计合理的 EWMA 控制图对正态假设并不敏感。

8 优点与局限

8.1 优点

EWMA 控制图的优点如下:

- a) 常规控制图仅使用当前的观测值或样本来监控过程。EWMA 控制图则使用之前所有的观测数据,赋予数据的权重随着与当前数据的久远程度增加而指数递减。根据所选的 λ 值,EWMA 控制图赋予最近的数据更大的权重。通过调整参数,能影响 EWMA 控制图的“记忆功能”。
- b) 对于非正态分布的质量特性,EWMA 控制图的表现更为稳健。

8.2 局限

EWMA 控制图的局限如下:

- a) EWMA 控制图对过程的小幅偏移较敏感,但用于监测大幅偏移的失控情况时,不如常规控制图反应及时。故而,宜将控制限较宽的常规控制图与 EWMA 控制图联合使用,从而同时监测过程均值的小幅和大幅偏移。
- b) 若所选的 EWMA 控制图的 λ 值较小,在生产的早期,EWMA 控制图去检测偏移更为有效。随着生产的延续,若出现了一个趋势,跟其他控制图一样,则该趋势不会使 EWMA 控制图马上超出控制限,错误地显示过程处于受控状态。

附 录 A
(资料性)
EWMA 控制图的应用

向每个药瓶装入 100 ml 药剂的连续装药生产过程。由于一瓶药为患者服用的单次剂量,故而需保证顾客购买的产品剂量低于下限 $T_L=99.5\text{ mL}$ 的概率不超过 0.135%。同时考虑到经济原因,避免装药过多,每瓶药的剂量上限 T_U 设定为 100.6 mL。

当过程处于统计控制状态时,每瓶药品剂量测量值的标准差 $\sigma_0=0.1\text{ mL}$ (由 150 个测量值计算得出),且药品剂量认为服从正态分布。为确保药品剂量超出公差限的概率小于 0.135%,剂量的均值允许在公差限向内 3 倍标准差的范围内波动。计算公式(A.1)和公式(A.2)如下:

$$U_\mu = T_U - 3\sigma_0 = 100.6 - 3 \times 0.1 = 100.3 \quad \text{.....(A.1)}$$

$$L_\mu = T_L + 3\sigma_0 = 99.5 + 3 \times 0.1 = 99.8 \quad \text{.....(A.2)}$$

可推出, $\delta_1 = \min \left[\frac{U_\mu - \mu_0}{\sigma_0}; \frac{\mu_0 - L_\mu}{\sigma_0} \right] = \frac{100.0 - 99.8}{0.1} = 2.0$ 。

当过程分布中心与公差中心一致, ARL_0 为 500。当过程发生幅度超过 $\delta_1=2$ 的偏移时,要求能够在监测 2 个~3 个连续样本后发现偏移。表 4 给出 $ARL_0=500$ 且 ARL_1 在 2~3 之间的对应参数值:

$ARL_1=2.50; \delta_1\sqrt{n}=2.5; L_z=3.07; \lambda=0.52$ 。

可推出, $n = \left(\frac{2.5}{2}\right)^2 = 1.5625$,取 $n=2$ (向上取整,以提高检测有效性)。

控制限如公式(A.3)和公式(A.4)所示:

$$U_{CL} = 100 + \left(\frac{3.07 \times 0.1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{0.52}{2 - 0.52}} \right) = 100.129 \quad \text{.....(A.3)}$$

$$L_{CL} = 100 - \left(\frac{3.07 \times 0.1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{0.52}{2 - 0.52}} \right) = 99.871 \quad \text{.....(A.4)}$$

初始值和目标值均为 $\mu_0=100$ 。

由先期研究得到, σ_0 的初始值为 0.1 mL。

表 A.1 给出了控制过程中得到的样本观测值,并计算出样本均值 $\bar{x}_i$ 、样本极差 R_i 和 EWMA 统计量的值 z_i 。

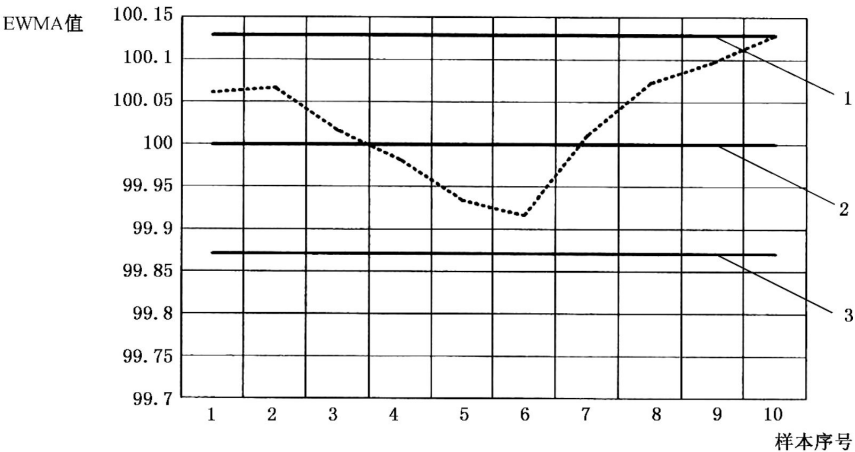
表 A.1 $n=2$ 时常规控制图和 EWMA 值的计算结果

样本序号	观测值	$\bar{x}_i$	R_i	$z_i = 0.52 \bar{x}_i + 0.48 z_{i-1}$
1	99.99 100.25	100.12	0.26	100.062
2	100.01 100.13	100.07	0.12	100.066
3	99.98 99.96	99.97	0.02	100.016
4	99.84 100.06	99.95	0.22	99.982
5	99.93 99.85	99.89	0.08	99.934
6	99.86 99.94	99.90	0.08	99.916
7	100.05 100.15	100.10	0.10	100.012

表 A.1 $n=2$ 时常规控制图和 EWMA 值的计算结果 (续)

样本序号	观测值	$\bar{x}_i$	R_i	$z_i = 0.52 \bar{x}_i + 0.48 z_{i-1}$
8	100.28 99.98	100.13	0.30	100.073
9	100.17 100.07	100.12	0.10	100.097
10	100.13 100.19	100.16	0.06	100.130

图 A.1 的第 10 个样本的 z_i 超出上控制限,过程出现偏移,宜进行调整。调整过程后,重新绘制新的控制图, $z_0 = \mu_0 = 100$ 。

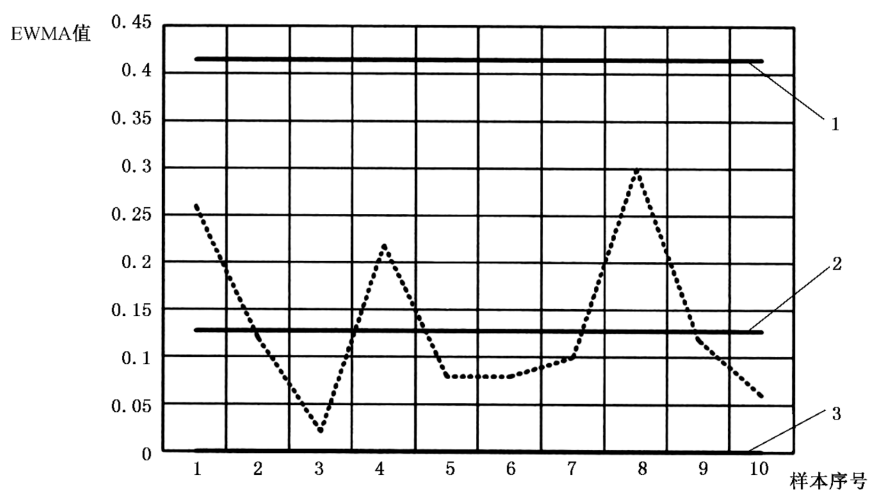


标引序号说明:
1—— $U_{CL}=100.129$;
2—— $CL=100.000$;
3—— $L_{CL}=99.871$ 。

图 A.1 用于监控均值的 EWMA 控制图

对过程的样本极差 R_i 绘制极差控制图,如图 A.2 所示,并未发现过程的离散程度发生变化。前面发现的偏移是均值的偏移,过程的离散程度没有增大。

注 1: 极差控制图的中心线及控制限的计算方法见 GB/T 17989.2。

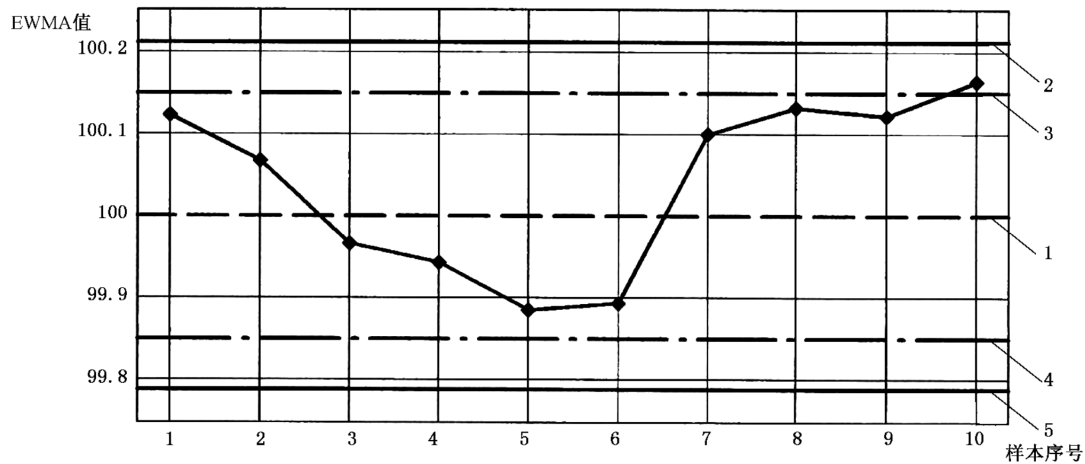


标引序号说明：

- 1——极差的上控制限；
- 2——目标值；
- 3——极差的下控制限。

图 A.2 监控离散程度的极差控制图

$n=2$ 、 $U_{\mu}=3.09$ 时,对应的均值控制图的控制限为 100.22 和 99.78,并未发现过程发生偏移。当增加子组大小至 $n=4$,才能发现剂量值的偏移(如图 A.3 所示),而质量控制的成本也随之扩大。



标引序号说明：

- 1——目标值；
- 2—— $n=2$ 时的上控制限；
- 3—— $n=4$ 时的上控制限；
- 4—— $n=4$ 时的下控制限；
- 5—— $n=2$ 时的下控制限。

图 A.3 $n=2$ 、 $n=4$ 时的均值控制图

注 2：本例说明,相比于常规控制图,EWMA 控制图对均值的小幅偏移更为敏感。如果发生突然、大幅的偏移,常规控制图能更及时迅速地予以发现。

附录 B

(规范性)

用于监控不合格品率的 EWMA 控制图

B.1 方法描述

EWMA 控制图可用于监控比例的变化。其用途与 p 图和 np 图相同,见 GB/T 17989.2。EWMA 控制图监控小幅或中幅偏移更有效。

样本的观测结果为 $p_1, p_2, \dots, p_i$, 对前一个 z_{i-1} 和当前 p_i 加权平均得到 z_i [见公式(B.1)]:

$$z_i = \lambda p_i + (1 - \lambda) z_{i-1} \quad \dots\dots\dots (B.1)$$

初始值 z_0 为目标值 p_0 。标准差 σ_0 由 s_0 进行估计:

$$s_0 = \sqrt{p_0(1 - p_0)} \quad \dots\dots\dots (B.2)$$

注: 在伯努利实验中, p_0 为不合格品率, 方差为 $p_0(1 - p_0)$ 。

下面来构造 EWMA 控制图。其上下控制限(U_{CL} 和 L_{CL})的计算见公式(B.3)和公式(B.4):

$$U_{CL} = p_0 + L_z \frac{s_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}} \quad \dots\dots\dots (B.3)$$

$$L_{CL} = p_0 - L_z \frac{s_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)}} \quad \dots\dots\dots (B.4)$$

只要 z_i 落在控制限内, 则过程处于受控状态。若某一 z_i 值超出控制限, 则过程发生偏移。

对过程进行调整后, EWMA 控制图需要重新绘制并重新初始化, 即令 $z_0 = p_0$ 。过程调整之前的观测结果不宜被计算在内。

当子组大小相同(均为 n)时, 可直接使用每个子组的不合格品数, 构造与上述控制图等价的 EWMA 控制图。此时, $p_0, p_i, z_i, \sigma_z, \sigma, U_{CL}$ 和 L_{CL} 均乘以 n 。

B.2 控制图的选择

与计量数据的 EWMA 控制图相同, 计数数据的 EWMA 控制图的有效性也使用 ARL 进行评估, 如 GB/T 17989.1 所述, 即需要一定数量的连续样本来检测偏移。若过程受控, 则虚发警报较少, 即发出一个虚发警报的平均样本数较大(通常 ARL_0 在 100 和 1 000 之间取值)。

另一方面, 宜尽快监测到过程发生偏移, 即在偏移发生和出现第一个超出控制限的点之间的连续样本数应尽可能少(即 ARL_1 很小)。

与 p 图(见 GB/T 17989.2)相比, EWMA 控制图更有效; 与 CUSUM 控制图(见 GB/T 17989.4)相比, 效果相当。尤其小幅和中幅偏移的情况, EWMA 控制图的有效性明显优于 p 图。而 p 图对于突发的、大幅偏移更为有效。

给定 ARL, 使用表 4, 按照 5.3 给出的方法, 确定 L_z 和 λ 值。但是该表只适用于 $np_0 > 5$ 的情况。

最大可接受的偏移为 $\delta_1 = (p_1 - p_0)/s_0$, 其中 p_1 为该生产过程允许的最大不合格品率。

B.3 示例

使用控制图监控一个焊接过程的不合格品率。根据先前研究, 受控过程的平均不合格品率 p_0 为 0.019 45(1.945%)。子组大小 n 为常数 1 600。

满足 $np_0 > 5$ 的条件时, 使用上述方法和表 4。子组大小相同, 绘制计数数据的 EWMA 控制图, 其 $ARL_0 = 370$, 且希望当不合格品率达到 0.028 时能够迅速监测到过程偏移。公式(B.5)给出:

$$s_0 = \sqrt{p_0(1 - p_0)} = 0.138\ 1 \dots\dots\dots (B.5)$$

由公式(B.6)可推出，

$$\delta_1 \sqrt{n} = [(0.028 - 0.019\ 45)/0.138\ 1] \times \sqrt{1\ 600} = 2.48 \dots\dots\dots (B.6)$$

ARL₀ = 370，由表 4 得到：

$$\delta_1 \sqrt{n} = 2.5; \lambda = 0.54; L_z = 2.98; ARL_1 = 2.38。$$

公式(B.7)和公式(B.8)可得到控制限：

$$U_{CL} = 0.019\ 45 + \frac{2.98 \times 0.138\ 1}{\sqrt{1\ 600}} \sqrt{\frac{0.54}{2 - 0.54}} = 0.025\ 0 \dots\dots\dots (B.7)$$

$$L_{CL} = 0.019\ 45 - \frac{2.98 \times 0.138\ 1}{\sqrt{1\ 600}} \sqrt{\frac{0.54}{2 - 0.54}} = 0.013\ 2 \dots\dots\dots (B.8)$$

子组大小不变或变化很小时，以子组中不合格品数构造的 EWMA 控制图与上述控制图等效，其参数如下：

$$z_0 = n p_0 = 31.12 \cong 31 \text{ 个；}$$

$$ns_0 = 220.96 \cong 221 \text{ 个；}$$

$$U_{CL} = 41.12 \cong 41 \text{ 个；}$$

$$L_{CL} = 21.12 \cong 21 \text{ 个。}$$

使用每个子组中的不合格品数来计算 z_i 。

附录 C

(规范性)

用于监控不合格数的 EWMA 控制图

C.1 方法描述

EWMA 控制图可用于监控不合格数的变化。其用途与 c 图和 u 图相同。EWMA 控制图监控小幅或中幅偏移更有效。既可用于服务业中的质量监测,也可用于生产过程和实验室数据。例如,EWMA 控制图可用于监测安全领域事故发生的次数和质量投诉的次数。

样本的观测结果为 $c_1, c_2, \dots, c_i$,对前一个 z_{i-1} 和当前 c_i 加权平均得到 z_i [见公式(C.1)]:

$$z_i = \lambda c_i + (1 - \lambda) z_{i-1} \quad \dots\dots\dots (C.1)$$

初始值 z_0 为目标值 c_0 。标准差由公式(C.2)估计:

$$s_0 = \sqrt{c_0} \quad \dots\dots\dots (C.2)$$

下面来构造 EWMA 控制图。其上下控制限(U_{CL} 和 L_{CL})的计算见公式(C.3)和公式(C.4):

$$U_{CL} = c_0 + L_z \sqrt{c_0} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad \dots\dots\dots (C.3)$$

$$L_{CL} = c_0 - L_z \sqrt{c_0} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad \dots\dots\dots (C.4)$$

只要 z_i 落在控制限内,则过程处于受控状态。若某一 z_i 值超出控制限,则过程发生偏移。

当只有上控制限时,可以考虑单侧的 EWMA 控制图。此时,也能在 EWMA 控制图上添加下控制限,以监测是否出现了质量提升。进而,分析造成这种提升的原因,使这样的质量提升得以保持。

对过程进行调整后,EWMA 控制图宜重新绘制并重新初始化,即令 $z_0 = c_0$ 。过程调整之前的观测结果不宜被计算在内。

C.2 控制图的选择

与监测不合格数的 c 图相同,EWMA 控制图也可用于检测不合格数。EWMA 控制图的有效性使用 ARL 进行评估。

若过程受控,则虚发警报较少,即发出一个虚发警报的平均样本数较大(通常 ARL_0 在 100 和 1 000 之间取值)。

同时,要尽快监测到过程发生偏移,即在偏移发生和出现第一个超出控制限的点之间的连续样本数应尽可能少(即 ARL_1 很小)。

与 c 图相比,EWMA 控制图更有效;与 CUSUM 控制图相比,效果相当。尤其小幅和中幅偏移的情况,EWMA 控制图的有效性明显优于 c 图。而 c 图对于突发的、大幅偏移更为有效。

给定 ARL,使用表 4,按照本文件给出的方法,确定 L_z 和 λ 值。但是该表只适用于 $c_0 > 5$ 的情况。

最大可接受的偏移 δ_1 见公式(C.5):

$$\delta_1 = \frac{c_1 - c_0}{s_0} \quad \dots\dots\dots (C.5)$$

类似地,监测单位不合格数的 EWMA 控制图只需用 u, u_0, u_1 替换 c, c_0, c_1 即可。

C.3 示例

下例中, $c_0 = 10$,则 $s_0 = \sqrt{10} = 3.16$ 。

满足 $c_0 > 5$ 的条件,使用上述方法和表 4,绘制不合格数的 EWMA 控制图。当 $c = c_0$ 时, $ARL_0 =$

370,且希望当平均不合格数达到 $c_1=15$ 时能够迅速监测到过程偏移。公式(C.6)给出:

$$\delta_1=(15-10)/\sqrt{10}=1.58 \qquad \dots\dots\dots (C.6)$$

当 $n=1$ 时,故 $\delta_1\sqrt{n}=1.58$ 。

由表 4,针对 $ARL_0=370$ 和 $\delta_1\sqrt{n}=1.5$,能得到下列参数值:

$$ARL_1=5.2;L_z=2.90;\lambda=0.26。$$

$$U_{CL}=10+2.9\times 3.16\sqrt{\frac{0.26}{2-0.26}}=13.54;$$

$$L_{CL}=10-2.9\times 3.16\sqrt{\frac{0.26}{2-0.26}}=6.46。$$

附录 D
(资料性)
控制图的有效性

D.1 n 的选取

控制图的有效性受子组大小的影响： n 越大，有效性越高。以合理的方式来确定 n ，用到以下两种工具。

- a) 有效性曲线：以偏移 δ 为横轴，以发生偏移 δ 而点子落在控制限内的概率 P_a （即未监测到该偏移的概率， β 风险）为纵轴。图 D.1 给出了一系列的以子组大小 n 为参数、给定 α 风险为 0.27% 的有效性曲线。给定 β 风险和最大允许偏移 δ_1 ，可使用该图确定子组大小。

注：不同 α 风险的取值对应着不同的有效性曲线族： $\delta_1\sqrt{n} = u_1 + u_2$ ，其中 u_1 和 u_2 分别是标准正态分布的 $\alpha/2$ 上分位数和 β 上分位数。

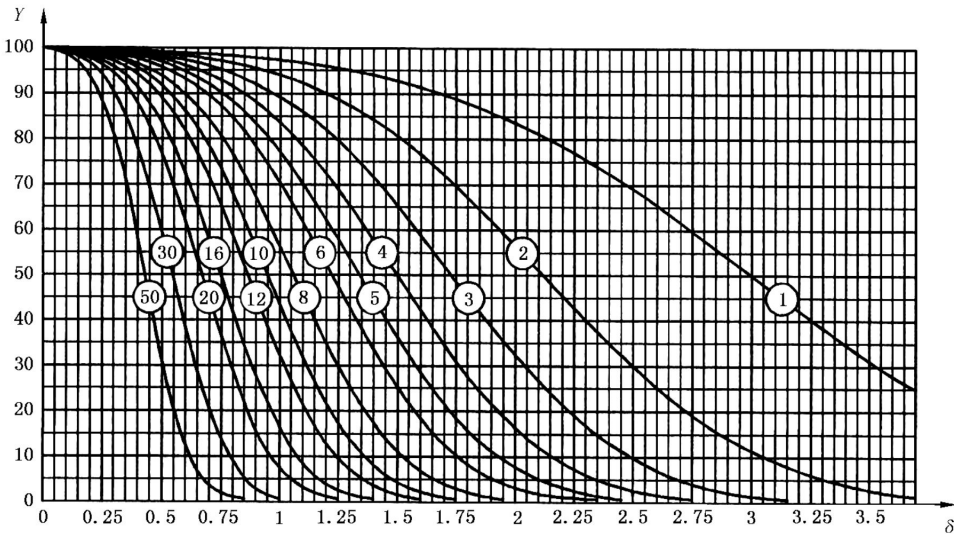
- b) 与链长相关的概念如下：

1) 平均链长 (ARL)：监测到偏移 δ 所需的平均连续样本数。

若 $\delta = \delta_1$ ，平均链长为 ARL_1 ；若 $\delta = 0$ ，平均链长为 ARL_0 。如果过程没有偏移，ARL 则为发生虚发警报前的平均样本数（即 ARL_0 ）。显然， ARL_1 值要小而 ARL_0 值要大。

2) 最大链长 (MAXRL)：当存在偏移时，监测到该偏移所需的最大连续样本数。更精确的表述为，监测到偏移所需的连续样本数，超过最大链长 (MAXRL) 的概率小于 5%。

值得注意的是，链长是一个服从非对称分布的随机变量。具体而言，对给定的偏移 δ 和子组大小 n ，通常只关注平均意义上的链长，即平均链长 ARL。



标引序号说明：

δ ——均值的偏移(以标准差的倍数表示)；

Y ——接收概率(β 风险)，%；

② ——子组大小。

图 D.1 常规控制图的有效性曲线(α 风险 = 0.27%)

D.2 均值控制图的有效性、ARL 和 MAXRL

表 D.1 给出了均值控制图对应于 $\delta_1\sqrt{n}$ 的概率 P_α 、ARL 和 MAXRL,其中 δ_1 为均值可接受的最大偏移,以标准差的倍数表示(见 5.3.3)。

表 D.1 仅适用于监测的变量 X 服从正态分布的情形。然而,如果子组大小大于 5,即使不服从正态分布,该表也能近似使用。相比均值控制图,控制离散程度的控制图(R 图和 s 图)的有效性对非正态分布更敏感。

此外,通常不同时刻所抽取的样本彼此独立。若存在自相关,则该计算方法不适用。若自相关性为正,则会增加虚发警报数,降低有效性。

D.3 示例

假定当过程处于统计控制状态时,均值 $\mu_0=100$ 且标准差等于 1.3。要求未监测到平均幅度为 2.275 的偏移的概率不高于 10%,则 $\delta_1=\frac{102.275-100}{1.3}=1.75$ (以标准差的倍数表示)。

根据图 D.1 中的有效性曲线,取 $n=6$,可推出 $\delta_1\sqrt{n}=4.29$ 。

由表 D.1(插值法)可知,给定未监测到偏移的概率为 10%,则 $ARL_1=1.1$, $MAXRL=2$,表明监测到偏移平均需要 1.1 个连续样本,最多需要 2 个(仅有 5%的可能性超出 2 个)。

由表 D.1(插值法)得到 $\delta_1\sqrt{n}=4.29$,可推出 $n=6$,即使用 EWMA 控制图进行控制时至少需要取 6 个观测值。

同时,若未出现偏移($\delta=0$),平均检测 370 个连续样本会出现一次虚发警报。

注 1: 为了避免调整控制图参数时重新计算样本数,可以选用样本数预先确定、不随参数调整而变化的控制图。

与常规控制图相似,固定样本数可得到更高性价比。

为了使产品达到预定的风险水平,需保证拒绝值与控制图的中心线 μ_0 的间距足够大。

因此,在开始生产前,有必要检查过程能力是否足够高,以确保 μ_0 和公差限之间的间距足够大。

这一方法常用于大规模生产固定产品的行业。若某些行业要生产种类繁多的产品,则这一方法不一定适用。若现有的过程中已使用了该方法,而短期内不容易进行改进。为了保证一致性,应根据不同产品的特点分别计算选用的样本数。

注 2: 在衡量常规控制图的有效性时,能任意选取偏移幅度来考察 ARL 和 MAXRL。

表 D.1 均值控制图的 P_α ,ARL 和 MAXRL

$\delta\sqrt{n}$	P_α	ARL	MAXRL
0	0.997 3	370.4	1 109
0.08	0.997 2	359.1	1 075
0.16	0.997 0	328.5	983
0.24	0.996 5	286.7	858
0.32	0.995 9	242.1	724
0.40	0.995 0	200.1	598
0.48	0.993 8	163.4	489
0.56	0.992 5	132.8	397

表 D.1 均值控制图的 P_α , ARL 和 MAXRL (续)

$\delta\sqrt{n}$	P_α	ARL	MAXRL
0.64	0.990 7	107.8	322
0.72	0.988 6	87.7	262
0.80	0.986 0	71.6	213
0.88	0.982 9	58.6	175
0.96	0.979 3	48.3	144
1.04	0.975 0	40.0	119
1.12	0.969 9	33.3	99
1.20	0.964 1	27.8	82
1.28	0.957 3	23.4	69
1.36	0.949 5	19.8	58
1.44	0.940 6	16.8	49
1.52	0.930 6	14.4	42
1.60	0.919 2	12.4	36
1.68	0.906 7	10.7	31
1.76	0.892 5	9.3	27
1.84	0.877 0	8.1	23
1.92	0.859 9	7.1	20
2.00	0.841 3	6.3	18
2.08	0.821 2	5.6	16
2.16	0.799 5	5.0	14
2.24	0.776 4	4.5	12
2.32	0.751 7	4.0	11
2.40	0.725 7	3.6	10
2.48	0.698 5	3.3	9
2.56	0.670 0	3.0	8
2.64	0.640 6	2.8	7
2.72	0.610 3	2.6	7
2.80	0.579 3	2.4	6
2.88	0.547 8	2.2	5
2.96	0.515 9	2.1	5
3.04	0.484 0	1.9	5

表 D.1 均值控制图的 P_{α} ,ARL 和 MAXRL (续)

$\delta\sqrt{n}$	P_{α}	ARL	MAXRL
3.12	0.452 2	1.8	4
3.20	0.420 7	1.7	4
3.28	0.389 7	1.6	4
3.36	0.356 4	1.6	3
3.44	0.330 0	1.5	3
3.52	0.301 5	1.4	3
3.60	0.287 7	1.4	3
3.68	0.248 2	1.3	3
3.76	0.223 6	1.3	3
3.84	0.200 4	1.3	2
3.92	0.178 8	1.2	2
4.00	0.158 7	1.2	2
4.08	0.140 0	1.2	2
4.16	0.123 0	1.1	2
4.24	0.107 5	1.1	2
4.32	0.093 4	1.1	2
4.40	0.080 8	1.1	2

参 考 文 献

- [1] GB/T 3358.1 统计学词汇及符号 第1部分:一般统计术语与用于概率的术语
 - [2] GB/T 3358.2 统计学词汇及符号 第2部分:应用统计
 - [3] GB/T 17989.2 控制图 第2部分:常规控制图
 - [4] GB/T 17989.3 控制图 第3部分:验收控制图
 - [5] GB/T 17989.4 控制图 第4部分:累积和控制图
 - [6] GB/T 17989.5 生产过程质量控制统计方法 控制图 第5部分:特殊控制图
 - [7] ISO 7873:1993 Control charts for arithmetic average with warning limits
 - [8] NF X06-031-1 Application de la statistique—Cartes de contrôle—Partie 1: Cartes de contrôle de Shewhart aux mesures
 - [9] NF X06-031-2 Application de la statistique—Cartes de contrôle—Partie 2: Cartes de contrôle aux attributs
 - [10] NF X06-031-3 Application de la statistique—Cartes de contrôle—Partie 3: Cartes de contrôle à moyennes mobiles avec pondération exponentielle (EWMA)
 - [11] NF X06-031-4 Application de la statistique—Cartes de contrôle—Partie 4: Cartes de contrôle des sommes cumulées (CUSUM)
 - [12] CROWDER S. V. A simple method for studying Run-Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Charts. *Technometrics*. 1987, 29(4) pp.401-407
 - [13] CROWDER S. V. Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes. *J. Qual. Technol.* 1989, 21(3) pp.155-162
 - [14] LUCAS J. M., & SACCUCCI M. S. Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*. 1990, 32 (1) pp. 1-29
 - [15] MONTGOMERY DOUGLAS C. *Introduction to Statistical Quality Control*, 7th Edition, 2012
 - [16] NIST-Engineering Statistics Handbook at <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc324.htm>
 - [17] ROBINSON P. B., & Ho T. Y. Average Run Lengths of Geometric Moving Average Charts by Numerical Methods. *Technometrics*. 1978, 20 (1) pp. 85-93
-

中 华 人 民 共 和 国
国 家 标 准
生产过程质量控制统计方法 控制图
第 6 部分:指数加权移动平均控制图
GB/T 17989.6—2022

*

中国标准出版社出版发行
北京市朝阳区和平里西街甲 2 号(100029)
北京市西城区三里河北街 16 号(100045)

网址:www.spc.org.cn

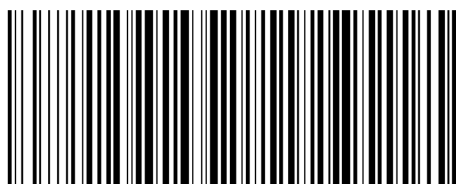
服务热线:400-168-0010

2022 年 3 月第一版

*

书号:155066·1-69072

版权专有 侵权必究



GB/T 17989.6—2022